

## 図チャレ 第125回(2012年2月)

$xy$  平面上に点  $(a, 2)$  を中心とし, 原点  $O$  を通る円  $C$  がある。  $C$  が放物線  $y = x^2$  と異なる 4 点で交わるとき, 次の問いに答えよ。

- (1)  $a$  の満たす条件を求めよ。
- (2)  $a$  が (1) で求めた条件を満たしながら変化するとき,  $C$  の動く範囲を図示せよ。

出典: 2002 年 横浜国立大学 経済学部

### 解答

(1) 円  $C$  は  $(0, 0)$  と  $(2a, 4)$  を直径の両端とするから, 方程式は

$$x(x - 2a) + y(y - 4) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$y = x^2$  と連立して  $y$  を消去すると

$$x(x - 2a) + x^2(x^2 - 4) = 0$$

$$\therefore x(x^3 - 3x - 2a) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$y = x^2$  より  $x$  に対して  $y$  がただ一つに決まるから,  $\textcircled{2}$  を満たす実数  $x$  が 4 つ存在することが題意の条件であるが, 3 次方程式が

$$x^3 - 3x - 2a = 0$$

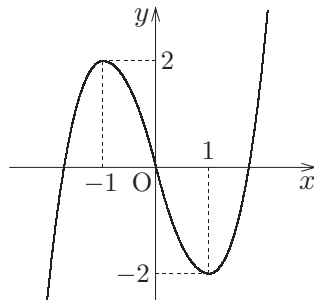
が 0 以外に相異なる 3 実数解を持てばよい。

$$f(x) = x^3 - 3x \text{ とおくと,}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x + 1)(x - 1)$$

$x$		-1		1	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大 2	↘	極小 -2	↗

$y = f(x)$  のグラフは



$y = f(x)$  のグラフと直線  $y = 2a$  は  $x \neq 0$  なる 3 点で交わるから,

$$-2 < 2a < 0 \text{ または } 0 < 2a < 2$$

$$\therefore -1 < a < 0 \text{ または } 0 < a < 1 \quad (\text{答}) \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

(2) ①かつ③を満たす点  $(x, y)$  が描く図形が  $C$  の動く範囲を表す。①より

$$2ax = x^2 + y(y - 4)$$

(i)  $x = 0$  のとき

$$y(y - 4) = 0 \quad \therefore y = 0, 4$$

$$\therefore (x, y) = (0, 0), (0, 4) \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

(ii)  $x \neq 0$  のとき

$$\textcircled{1} \iff a = \frac{x^2 + y(y - 4)}{2x}$$

③より

$$-1 < \frac{x^2 + y(y - 4)}{2x} < 0 \text{ または } 0 < \frac{x^2 + y(y - 4)}{2x} < 1$$

$$-2x^2 < x\{x^2 + y(y - 4)\} < 0 \text{ または } 0 < x\{x^2 + y(y - 4)\} < 2x^2$$

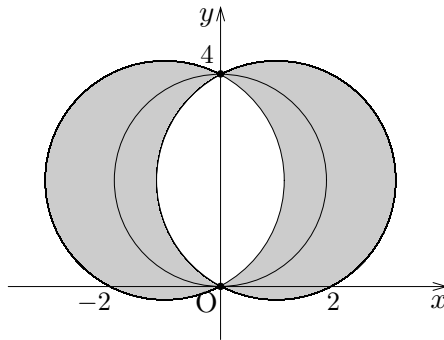
$$\begin{cases} x\{x^2 + y(y - 4)\} < 0 \\ x\{(x + 1)^2 + (y - 2)^2 - 5\} > 0 \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} x\{x^2 + y(y - 4)\} > 0 \\ x\{(x + 1)^2 + (y - 2)^2 - 5\} < 0 \end{cases}$$

$$\dots\dots \textcircled{5}$$

④または⑤が  $C$  の動く範囲であり，図示すると次図の網目部分(2点  $(0, 0)$ ,  $(0, 4)$  は含むが，他の円周上の点は含まない)となる。



(答)