

図チャレ 第126回 (2012年3月)

△ABCの3辺の長さがそれぞれ

$$AB = 5, \quad BC = 7, \quad AC = 4\sqrt{2}$$

であるとする。この三角形の∠ABCの大きさを B で表すと

$$\cos B = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

であり、△ABCの外接円の半径 R は、

$$R = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

である。また、∠ABCの2等分線と△ABCの外接円の交点でBと異なる点をDとする。このとき、

$$AD = \sqrt{\boxed{\text{カキ}}}$$

であり、さらに△ABCの外接円の中心をOとすると、△AODの面積は $\boxed{\text{ク}}$ となる。

出典：2012年 東京理科大学 理工学部

解答

△ABCにおいて、余弦定理より

$$\cos B = \frac{5^2 + 7^2 - (4\sqrt{2})^2}{2 \times 5 \times 7} = \frac{\boxed{3}}{\boxed{5}}$$

(ア)
(イ)

$0^\circ < B < 180^\circ$ より $\sin B > 0$ であるから

$$\sin B = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

正弦定理より、△ABCの外接円の半径 R は

$$R = \frac{AC}{2 \sin B} = \frac{4\sqrt{2}}{2 \times \frac{4}{5}} = \frac{\boxed{5}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{2}}$$

(ウ)
(エ)
(オ)

円に内接する四角形の対角は互いに補角であるから、
補角の公式より

$$\cos \angle ADC = -\cos \angle ABC = -\frac{3}{5}$$

$\angle ABD = \angle CBD$ より $AD = CD$ であることを考えて、

$$AD = CD = x$$

とおき、 $\triangle ACD$ に余弦定理を適用すると

$$(4\sqrt{2})^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{16}{5}x^2$$

$$\therefore x^2 = 10$$

$x = AD > 0$ より

$$AD = \sqrt{\boxed{10}} \text{ (カキ)}$$

円周角の性質より

$$\angle AOD = 2\angle ABD = \angle ABC$$

であるから、 $\triangle AOD$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}R^2 \sin \angle AOD = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{4}{5} = \boxed{5} \text{ (ク)}$$

