

## 図チャレ 第127回(2012年4月)

空間内の3点  $A(2, 2, 2)$ ,  $B(0, 0, 2)$ ,  $P(x, y, z)$  について, 次の問いに答えよ。

- (1) 空間内の点  $P$  が  $\angle APB = 90^\circ$  を満たしながら動くとする。このとき, 点  $P$  がえがく図形を求めよ。
- (2) 点  $P$  が  $\angle APB = 90^\circ$  を満たしながら動くとき, 直角三角形  $\triangle APB$  の面積の最大値を求めよ。
- (3) 点  $P$  が  $\angle APB = 90^\circ$  および  $z = 2$  を満たし, かつ  $\triangle APB$  の面積が最大となるとする。このとき, 点  $L(1, 1, 4)$  に置いた光源が  $xy$  平面上に作る三角形  $\triangle APB$  の影の面積を求めよ。

出典: 2012年 広島大学 総合科学部

### 解答

- (1)  $\angle APB = 90^\circ$  より特に  $P \neq A, B$  であり, 円周角を考えると, 点  $P$  の描く図形は  $A, B$  を直径の両端とする球面から2点  $A, B$  を除いた図形 (答) である。

(2)  $AB = \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2 + (2-2)^2} = 2\sqrt{2}$

(1)より, 点  $P$  は直径  $2\sqrt{2}$  の円周上(2点  $A, B$  を除く)を動くと考えてよいから,

$$\angle BAP = \theta \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと,  $\triangle APB$  の面積  $S$  は

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cos \theta \cdot 2\sqrt{2} \sin \theta = 4 \sin \theta \cos \theta = 2 \sin 2\theta$$

であるから,

$$2\theta = \frac{\pi}{2}$$

であり,

$$\text{最大値は } 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2 \quad (\text{答})$$

- (3) (2)より,  $\triangle APB$  は  $AB$  を斜辺とする直角二等辺三角形であり,  $P(2, 0, 2)$  または  $P(0, 2, 2)$

題意の面積を求めるには,  $P(2, 0, 2)$  として一般性を失わない。

直線  $LA, LB, LP$  と  $xy$  平面との交点をそれぞれ  $A', B', P'$  とすると,  $A'$  は  $LA$  を  $2:1$  に外分するから

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{-\overrightarrow{OL} + 2\overrightarrow{OA}}{2-1} = -(1, 1, 4) + 2(2, 2, 2) = (3, 3, 0)$$

同様に,

$$\overrightarrow{OB'} = -(1, 1, 4) + 2(0, 0, 2) = (-1, -1, 0)$$

$$\overrightarrow{OP'} = -(1, 1, 4) + 2(2, 0, 2) = (3, -1, 0)$$

$\triangle APB$  の影  $\triangle A'P'B'$  の面積  $S'$  は

$$S' = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8 \quad (\text{答})$$

(注) 点  $L$  を中心とする 2 倍相似変換になっていることに注目して

$$S' = 2^2 S_{\max} = 8$$

と求めてもよい。