

図チャレ 第128回(2012年5月)

一辺の長さが1の正四面体OABCを考える。底面ABCの内接円の半径を r とおき、頂点Oを通り底面ABCに垂直な直線からの距離が r 以下である点全体からなる円柱を T とする。

(1) $r = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ である。

(2) 正四面体OABCの高さは $\frac{\sqrt{\boxed{\text{ハ}}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ である。

- (3) 辺ABの中点と頂点Oとを結ぶ線分上に点Pをとり、 $x = OP$ とおく。Pを通り底面ABCに平行な平面による側面OABの切り口を L とする。

L が T に含まれるような x の最大値を x_1 とすると

$$x_1 = \frac{\sqrt{\boxed{\text{フ}}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$$

である。

$x_1 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、 L と T の共通部分の長さは

$$\frac{\boxed{\text{ホ}}}{\boxed{\text{マ}}} \sqrt{\frac{\boxed{\text{ミ}}}{\boxed{\text{ム}}} - x^2}$$

である。

正四面体OABCの表面で T に含まれる部分の面積は

$$\frac{\pi}{\boxed{\text{メ}}}$$

である。

出典：2012年 上智大学 理工学部

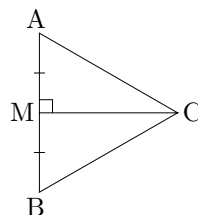
解答

(1) 正三角形 ABC の面積を 2 通りに表すことにより

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot r \times 3 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin 60^\circ \quad \therefore r = \frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{6}} \quad (\text{ネ})$$

(2) 辺 AB の中点を M とおくと, $CM \perp AB$ であるから, 三平方の定理より

$$\begin{aligned} CM &= \sqrt{CA^2 - AM^2} \\ &= \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



頂点 O から面 ABC におろした垂線の足を H とすると, $OA = OB = OC$ より, O を中心とする球面と平面 ABC の交わりが 3 点 A, B, C を通る円となり,

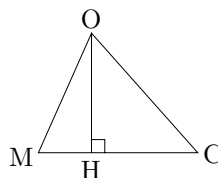
H は $\triangle ABC$ の外心

となる。 $\triangle ABC$ は正三角形であるから

H は $\triangle ABC$ の重心

でもあり, H は CM を 2 : 1 に内分するから

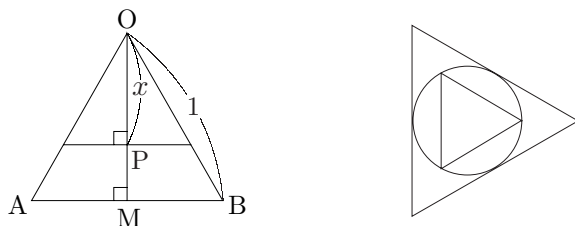
$$CH = \frac{2}{3} CM = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



直角三角形 OCH において三平方の定理を適用することにより, 高さ OH は

$$OH = \sqrt{OC^2 - CH^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{3}} \quad (\text{ハ})$$

(3)



切り口 L が円柱 T に含まれるような長さの最大値 l は, 半径 r の内接円に内接する正三角形の一辺の長さと等しいから, 正弦定理より

$$\frac{l}{\sin 60^\circ} = 2r \quad \therefore l = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$$

よって, $OP = x$ の最大値 x_1 は

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} l = \frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{4}} \quad (\text{フ})$$

$x_1 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき

$$OP : PM = x : \frac{\sqrt{3}}{2} - x$$

より、円柱 T の軸と切り口 L との距離は

$$\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} r = \frac{2}{\sqrt{3}} x \times \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{x}{3}$$

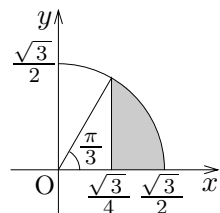
L と T の共通部分の長さは、三平方の定理より

$$\begin{aligned} 2\sqrt{r^2 - \left(\frac{x}{3}\right)^2} &= \frac{2}{3}\sqrt{9r^2 - x^2} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{9\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 - x^2} \\ &= \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}} \sqrt{\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}} - x^2} \end{aligned}$$

(ホ) (ニ)
(マ) (ル)

面 OAB 上で T に含まれる部分の面積は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} x_1 \times x_1 + \int_{x_1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3}{4} - x^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{4} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{16} \\ &= \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$



面 OBC 上および面 OCA 上でも同様であり、面 ABC で T に含まれるのは内接円の周および内部で

$$\text{面積は } \pi r^2 = \frac{\pi}{12}$$

正四面体の表面で T に含まれる部分の面積は

$$\frac{\pi}{12} \times 4 = \frac{\pi}{\boxed{3}}$$

(ク)