

図チャレ 第130回 (2012年7月)

xy 平面上において

$$\begin{cases} x = \cos 3\theta \\ y = \sin 2\theta \end{cases} \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

により媒介変数表示された曲線 C と x 軸で囲まれた領域の面積 S を求めよ。

解答

$$\frac{dx}{d\theta} = -3 \sin 3\theta$$

より, $x = \cos 3\theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) の増減は

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{d\theta}$	-	0	+
x	1	↘ 極大 -1	↗ 0

曲線 C の $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ の部分と $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の部分はそれぞれ関数のグラフとみなすことができ, それぞれ $y = f(x)$, $y = g(x)$ とおくと

$$-1 \leq x \leq 0 \quad \left(\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right) \text{ において } f(x) \geq \sin \frac{2}{3}\pi \geq g(x) \geq 0$$

であるから, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_{-1}^0 g(x) dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^0 f(\cos 3\theta) \frac{dx}{d\theta} d\theta - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} g(\cos 3\theta) \frac{dx}{d\theta} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \sin 2\theta (-3 \sin 3\theta) d\theta - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta (-3 \sin 3\theta) d\theta \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3\theta \sin 2\theta d\theta + 3 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 3\theta \sin 2\theta d\theta \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3\theta \sin 2\theta d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta - \cos 5\theta) d\theta \\ &= \frac{3}{2} \left[\sin \theta - \frac{1}{5} \sin 5\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{2} \times \left(1 - \frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{6}{5} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(注) $3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3\theta \sin 2\theta \, d\theta$ から先の計算は、次のようにしてもよい。

$$\begin{aligned} 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3\theta \sin 2\theta \, d\theta &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta) \cdot 2 \sin \theta \cos \theta \, d\theta \\ &= 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin^2 \theta - 4 \sin^4 \theta) (\sin \theta)' \, d\theta \\ &= 6 \left[\sin^3 \theta - \frac{4}{5} \sin^5 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{6}{5} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$