

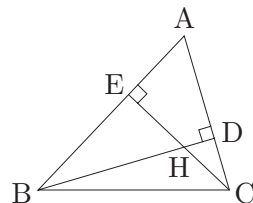
## 図チャレ 第132回(2012年9月)

3辺の長さが  $AB = 4$ ,  $BC = \sqrt{13}$ ,  $CA = 3$  である三角形  $ABC$  の垂心を  $H$  とする。  
 $AH$  の長さを求めよ。

解答

$$3 < \sqrt{13} < 4, \quad 4^2 < (\sqrt{13})^2 + 3^2$$

より  $\triangle ABC$  は鋭角三角形であるから、直線  $BH$  は辺  $CA$  上の点  $D$  を通り、直線  $CH$  は辺  $AB$  上の点  $E$  を通る。



(解法1)

$AD = x$  とおき、直角三角形  $ABD$ ,  $BCD$  に三平方の定理を適用して、 $BD^2$  を2通りに表すと

$$4^2 - x^2 = 13 - (3 - x)^2$$

$$16 = 13 - 9 + 6x \quad \therefore x = AD = 2$$

$\angle BDC = \angle BEC = 90^\circ$  より4点  $B, C, D, E$  は同一円周上にあるから、方べきの定理より

$$AB \cdot AE = AC \cdot AD$$

$$4AE = 3 \times 2 \quad \therefore AE = \frac{3}{2}$$

直角三角形  $ACE$  において三平方の定理より

$$CE = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2} \sqrt{2^2 - 1^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$\angle ADH = \angle AEH = 90^\circ$  より4点  $A, E, H, D$  は同一円周上にあるから、方べきの定理より

$$CE \cdot CH = CD \cdot CA$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} CH = 1 \times 3 \quad \therefore CH = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

直角三角形  $ADH$ ,  $CDH$  に三平方の定理を適用して、 $DH^2$  を2通りに表すと

$$AH^2 - 2^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1^2$$

$$\therefore AH = \sqrt{4 + \frac{4}{3} - 1} = \sqrt{\frac{13}{3}} = \frac{\sqrt{39}}{3} \quad (\text{答})$$

(解法2)

$\triangle ABC$  において余弦定理より

$$\cos A = \frac{4^2 + 3^2 - 13}{2 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{1}{2}$$

直角三角形  $AEC$  および  $ABD$  において

$$AE = AC \cos A = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$AD = AB \cos A = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

△ADEにおいて余弦定理より

$$DE^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9 + 16 - 12}{4} = \frac{13}{4}$$

$$\therefore DE = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

∠ADH = ∠AEH = 90°より, AHは△ADEの外接円の直径であるから, 正弦定理より

$$AH = \frac{DE}{\sin A} = \frac{\sqrt{13}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{39}}{3} \quad (\text{答})$$