

図チャレ 第 133 回 (2012 年 10 月)

正四面体 ABCD がある。平面 ABC 上に $\triangle ABC$ と辺 BC のみを共有する正三角形 BCE を描き、平面 ABD 上に $\triangle ABD$ と辺 BD のみを共有する正三角形 BDF を描く。このとき、四角形 CDFE は正方形であることを示せ。

解答

四角形 ABEC および四角形 ABFD はひし形であるから

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

が成り立ち、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CF} &= \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CD}\end{aligned}$$

よって、4 点 C, D, F, E は同一平面上にあり、特に平行四辺形の 4 頂点となる。

正四面体 ABCD の一辺の長さを a とすると

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a^2 \cos 60^\circ = \frac{1}{2}a^2$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE} &= (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}) \\ &= (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= 0\end{aligned}$$

となって、

$$\angle DCE = 90^\circ$$

$\triangle BCD$ および $\triangle BCE$ は正三角形であるから

$$CD = BC = CE$$

よって、平行四辺形 CDFE は長方形かつひし形であるから、正方形である。

(証明おわり)

(注) 4 頂点が同一平面上にないと四角形とはいえないので、

$$CD \perp CE \text{ かつ } CD = CE$$

を示すだけでは、正方形であることを示したことはない。