

図チャレ 第134回(2012年11月)

一辺の長さ1の正三角形PQRの辺RP上に点A, 辺PQ上に点B, 辺QR上に点Cをそれぞれとり, 四角形ABCDが正方形になるようにする。正方形ABCDが正三角形PQRの外部に出ない範囲で動かすとき, 正方形ABCDの一辺の長さ a のとり得る値の範囲を求めよ。

解答

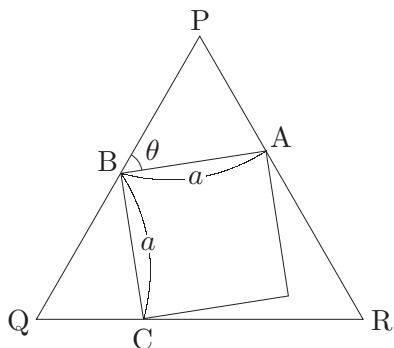
$\angle ABP = \theta$ とおくと,

$$\angle BAP = \frac{2}{3}\pi - \theta, \quad \angle CBQ = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\angle BCQ = \frac{2}{3}\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\pi}{6} + \theta$$

$$\frac{2}{3}\pi - \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{6} + \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ より}$$

$$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$



$\triangle ABP$ および $\triangle BCQ$ において正弦定理より

$$\frac{BP}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \theta\right)} = \frac{a}{\sin\frac{\pi}{3}}, \quad \frac{BQ}{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right)} = \frac{a}{\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$\therefore BP = \frac{2}{\sqrt{3}}a \sin\left(\frac{2}{3}\pi - \theta\right), \quad BQ = \frac{2}{\sqrt{3}}a \sin\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right)$$

$$\begin{aligned} 1 = BP + BQ &= \frac{2}{\sqrt{3}}a \left\{ \sin\left(\frac{2}{3}\pi - \theta\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) \right\} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}a \left(\sin\frac{2}{3}\pi \cos\theta - \cos\frac{2}{3}\pi \sin\theta \right. \\ &\quad \left. + \sin\frac{\pi}{6} \cos\theta + \cos\frac{\pi}{6} \sin\theta \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}a \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\theta + \frac{1}{2} \sin\theta + \frac{1}{2} \cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\theta \right) \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}a (\sin\theta + \cos\theta) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (1 + \sqrt{3})a \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\theta \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (1 + \sqrt{3})a \left(\sin\theta \cos\frac{\pi}{4} + \cos\theta \sin\frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (1 + \sqrt{3})a \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \text{ より}$$

$$\frac{5}{12}\pi \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{7}{12}\pi$$

であるから,

$$\sin \frac{5}{12}\pi = \sin \frac{7}{12}\pi \leq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \leq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

これを同値変形して a のとり得る値の範囲を求めると

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (1 + \sqrt{3})a \leq 1 \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (1 + \sqrt{3})a$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)} \leq a \leq \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{2\sqrt{2}} \leq a \leq \sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$$

$$\therefore \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \leq a \leq 2\sqrt{3} - 3 \quad (\text{答})$$

(注) 上の解答では

$$\sin \frac{5}{12}\pi = \sin \frac{7}{12}\pi = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

を準有名角の三角比として値を認めているが, 加法定理を用いれば

$$\sin \frac{5}{12}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\sin \frac{7}{12}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}$$

と求めることができる。また, 一方さえ導いておけば, 補角の公式により

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

であることがわかる。