

図チャレ 第135回(2012年12月)

円 C 上に 2 点 A, B をとり, 点 A において円 C に内接する円 D と点 B において円 C に内接する円 E とは共有点を持たないとする。2 円 D, E の共通接線と円 D, E の接点をそれぞれ T, U とするとき, 直線 AT と直線 BU の交点 P は円 C 上にあることを証明せよ。

解答

点 A における円 D の接線と直線 TU の交点を F , 点 B における円 E の接線と直線 TU の交点を G とし,

$$\angle FAT = \angle FTA = \angle PTU = \alpha, \quad \angle GBU = \angle GUB = \angle PUT = \beta$$

とおくと,

$$\angle AFT = 180^\circ - 2\alpha$$

$$\angle BGU = 180^\circ - 2\beta$$

$$\angle TPU = 180^\circ - \alpha - \beta$$

1° 直線 AF と直線 BG が平行であるとき

$$\angle AFT + \angle BGU = 180^\circ$$

より

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\therefore \angle TPU = 90^\circ$$

よって, 点 P は AB を直径とする円 C 上にある。

2° 直線 AF と直線 BG が点 H で交わり, H と P が直線 TU に関して反対側にあるとき $\triangle FGH$ において

$$\begin{aligned} \angle FHG &= 180^\circ - \angle HFG - \angle HGF \\ &= 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) \\ &\quad - (180^\circ - 2\beta) \\ &= 2\alpha + 2\beta - 180^\circ \end{aligned}$$

A, B は同じ円 C の接点であるから

$$HA = HB$$

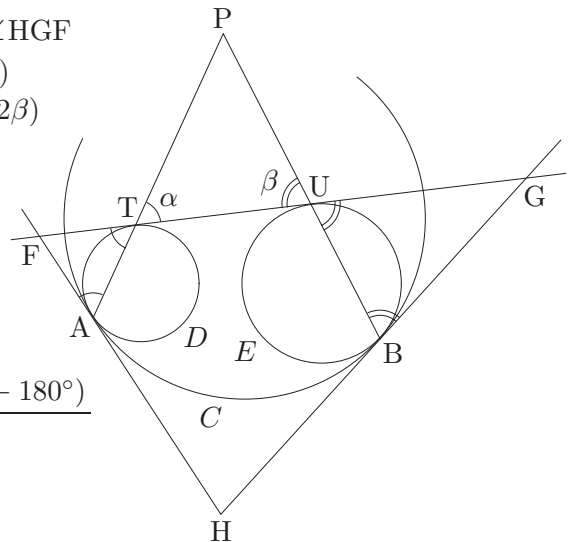
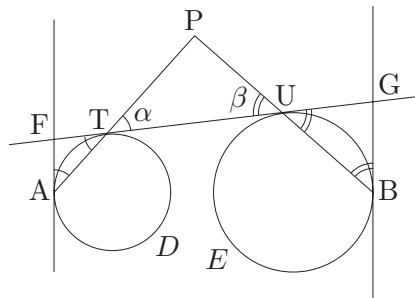
となって

$$\angle ABH = \angle BAH$$

であり,

$$\begin{aligned} \angle ABH &= \frac{180^\circ - (2\alpha + 2\beta - 180^\circ)}{2} \\ &= 180^\circ - \alpha - \beta \\ &= \angle APB \end{aligned}$$

接弦定理より, 点 P は円 C 上にある。



3° 直線 AF と直線 BG が点 H で交わり，H と P が直線 TU に関して同じ側にあるとき
 三角形の外角の大きさは，それと隣り合わない 2 つの内角の大きさの和に等しいから，
 $\triangle AFT$ および $\triangle BGU$ において

$$\angle HFG = 2\alpha, \quad \angle HGF = 2\beta$$

$\triangle FGH$ において

$$\angle FHG = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$$

A, B は同じ円 C の接点であるから

$$HA = HB$$

となって

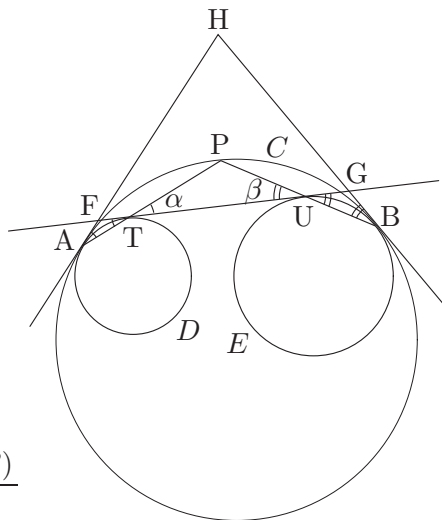
$$\angle ABH = \angle BAH$$

であり，

$$\begin{aligned} \angle ABH &= \frac{180^\circ - (180^\circ - 2\alpha - 2\beta)}{2} \\ &= \alpha + \beta \end{aligned}$$

$\angle TPU = 180^\circ - \alpha - \beta$ であるから，接弦定理より点 P は円 C 上にある。

(証明おわり)



(注) 円 D と円 E が共有点を持たないと仮定したのは，題意の設定を把握しやすくするためのものであり，本質的な条件ではない。