

## 図チャレ 第136回(2013年1月)

座標平面上において  $O(0, 0)$ ,  $A(1, 0)$ ,  $P(25, 2013)$  とするとき,  $\angle AOP = \theta$  とおく。1つの点のまわりに  $\theta$  だけ回転する操作を  $n$  回くり返すとき, はじめて1回転( $2\pi$ )を超えるような最小の  $n$  を求めよ。

解答

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta \text{ とおくと}$$

$$\tan \alpha = \frac{25}{2013} \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

半角公式より

$$\tan^2 \frac{\pi}{12} = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{12}}{\cos^2 \frac{\pi}{12}} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{1 + \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = (2 - \sqrt{3})^2$$

であり,  $\tan \frac{\pi}{12} > 0$  であるから

$$\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$$

この値と  $\tan \alpha$  を比較すると

$$\begin{aligned} \tan \frac{\pi}{12} - \tan \alpha &= 2 - \sqrt{3} - \frac{25}{2013} \\ &= \frac{4001 - 2013\sqrt{3}}{2013} \\ &= \frac{\sqrt{16008001} - \sqrt{12156507}}{2013} > 0 \end{aligned}$$

となるから

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{12}$$

$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$  より

$$4\theta = 2\pi - 4\alpha < 2\pi$$

$$5\theta = \frac{5}{2}\pi - 5\alpha > \frac{5}{2}\pi - 6\alpha > \frac{5}{2}\pi - 6 \times \frac{\pi}{12} = 2\pi$$

であるから, 1回転を超えるような最小の自然数  $n$  は

$$n = 5 \quad (\text{答})$$

である。