

図チャレ 第137回 (2013年2月)

xyz 空間に点 $P(t \cos t, t \sin t, 0)$ と点 $Q(0, 0, t)$ をとる。 t が 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで動くとき、 $\triangle OPQ$ が描く立体を V とする。ただし O は原点である。

- (1) $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ をみたく t を固定する。平面 $z = k$ (k は定数) と $\triangle OPQ$ が交わるとき、その共通部分は線分になる。その線分の端点を $(0, 0, k)$ と $(x(t), y(t), k)$ とするとき、 $x(t), y(t)$ を求めよ。
- (2) k を定数とするととき、 $\frac{d}{dt}\{(t-k)^2 \sin 2t\}$ を求めよ。
- (3) 平面 $z = k$ と V との共通部分の面積 $A(k)$ を求めよ。
- (4) V の体積を求めよ。

出典: 2003年 富山医科薬科大学(当時)

解答

- (1) 点 $(x(t), y(t), k)$ は PQ を $k : (t-k)$ に内分するから、

$$\begin{aligned} (x(t), y(t), k) &= \frac{(t-k)\overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{OQ}}{k + (t-k)} \\ &= \frac{t-k}{t}(t \cos t, t \sin t, 0) + \frac{k}{t}(0, 0, t) \\ \therefore x(t) &= (t-k) \cos t, \quad y(t) = (t-k) \sin t \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

- (2) $\frac{d}{dt}\{(t-k)^2 \sin 2t\} = 2(t-k) \sin 2t + (t-k)^2 \cdot 2 \cos 2t$
 $= 2(t-k)\{\sin 2t + (t-k) \cos 2t\}$ (答)

- (3) 平面 $z = k$ による V の断面は

$$k \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

の範囲で現れ、 $k < t < \frac{\pi}{2}$ において

$$y'(t) = 1 \cdot \sin t + (t-k) \cos t > 0$$

であるから、平面 $z = k$ 上での点 $(x(t), y(t))$ の軌跡は y の関数のグラフとみなすことができ、それを $x = f(y)$ とおく。 $x(t) \geq 0$ であることを考え、断面積 $A(k)$ は

$$\begin{aligned} A(k) &= \int_{y(k)}^{y(\frac{\pi}{2})} f(y) dy \\ &= \int_k^{\frac{\pi}{2}} x(t)y'(t) dt \quad (x(t) = f(y(t))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_k^{\frac{\pi}{2}} (t-k) \cos t \{ \sin t + (t-k) \cos t \} dt \\
&= \frac{1}{2} \int_k^{\frac{\pi}{2}} \{ (t-k) \sin 2t + (t-k)^2 (1 + \cos 2t) \} dt \\
&= \frac{1}{2} \int_k^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \cdot 2(t-k) \{ \sin 2t + (t-k) \cos 2t \} + (t-k)^2 \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (t-k)^2 \sin 2t + \frac{1}{3} (t-k)^3 \right]_k^{\frac{\pi}{2}} \quad (\because (2)) \\
&= \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2} - k \right)^3 \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

(別解) t の微小変化量 Δt に対する面積の微小変化量 ΔA は, 扇形面積で近似できて

$$\Delta A \doteq \frac{1}{2} (t-k)^2 \Delta t$$

となるから,

$$\frac{dA(k)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} (t-k)^2$$

断面積 $A(k)$ は

$$A(k) = \int_k^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (t-k)^2 dt = \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2} - k \right)^3 \quad (\text{答})$$

(3) V の体積 W は

$$\begin{aligned}
W &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} A(k) dk \\
&= \frac{1}{6} \left[-\frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} - k \right)^4 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 = \frac{\pi^4}{384} \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

(別解) t の微小変化量 Δt に対する体積の微小変化量 ΔW は, 扇形を底面とする高さ t の錐体の体積で近似できて

$$\Delta W \doteq \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times t^2 \times \Delta t \right) \times t = \frac{1}{6} t^3 \Delta t$$

となるから,

$$\frac{dW}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{1}{6} t^3$$

V の体積 W は

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{6} t^3 dt = \frac{1}{6} \left[\frac{1}{4} t^4 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 = \frac{\pi^4}{384} \quad (\text{答})$$