

図チャレ 第138回(2013年3月)

座標平面上の2点 $A(0, 1)$, $B(t, 0)$ を考える。ただし, $t \geq 0$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 線分 AB を1辺とする正三角形は2つある。それぞれの正三角形について, 2点 A, B 以外の頂点の座標を t を用いて表せ。
- (2) (1) で求めた2点のうち x 座標が小さい方を C とする。 t を動かすとき, 点 C の軌跡を図示せよ。
- (3) k を定数とする。点 B と直線 $y = kx$ 上の点 P をそれぞれうまく選ぶことで3点 A, B, P を頂点とする正三角形ができるとき, k の値の範囲を求めよ。

出典: 2013年 広島大学

解答

- (1) $\triangle ABD$ が正三角形であるとき, AB の中点を M とすると

$$\overrightarrow{MD} \perp \overrightarrow{AB} = (t, -1), \quad |\overrightarrow{MD}| = \frac{\sqrt{3}}{2} |\overrightarrow{AB}|$$

であるから,

$$\overrightarrow{MD} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} (1, t)$$

$$\therefore \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MD} = \left(\frac{t}{2}, \frac{1}{2} \right) \pm \frac{\sqrt{3}}{2} (1, t)$$

A, B 以外の頂点の座標は

$$\left(\frac{t \pm \sqrt{3}}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{3}t}{2} \right) \text{ (複号同順) (答)}$$

- (2) (1)より

$$C \left(\frac{t - \sqrt{3}}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}t}{2} \right)$$

$C(x, y)$ とおくと

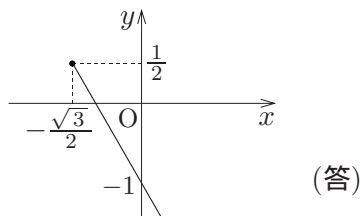
$$\begin{cases} x = \frac{t - \sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1 - \sqrt{3}t}{2} \\ t \geq 0 \end{cases}$$

t を消去すると

$$y = \frac{1 - \sqrt{3}(2x + \sqrt{3})}{2} \quad \text{かつ} \quad 2x + \sqrt{3} \geq 0$$

$$\therefore y = -\sqrt{3}x - 1 \quad \text{かつ} \quad x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

これを図示して、点 C の軌跡は次図のようになる。

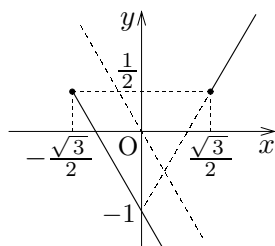


(3) 点 $C' \left(\frac{t + \sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}t}{2} \right)$ ($t \geq 0$) の軌跡は

$$y = \frac{1 + \sqrt{3}(2x - \sqrt{3})}{2} \quad \text{かつ} \quad 2x - \sqrt{3} \geq 0$$

$$\therefore y = \sqrt{3}x - 1 \quad \text{かつ} \quad x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

点 C の軌跡と点 C' の軌跡をあわせると



この図形と直線 $y = kx$ との共有点を P とすれば正三角形 ABP が得られるから、共有点をもつような傾き k の範囲を図から読み取って、

$$k < -\sqrt{3} \quad \text{または} \quad k \geq -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\text{答})$$