

図チャレ 第139回(2013年4月)

平面上で2つの円 S, S' が点 P で内接している。ただし S' が S より小さいとする。円 S, S' の中心をそれぞれ O, O' とおく。円 S' 上において直線 PO' 上にはない点 Q をとる。直線 PQ と円 S との P とは異なる交点を A 、直線 AO と円 S との A とは異なる交点を B 、直線 BO' と円 S との B とは異なる交点を C 、直線 CQ と円 S との C とは異なる交点を D とする。

(1) $AO \parallel QO'$ を示せ。

(2) $DB = BP$ を示せ。

出典：2013年 滋賀医科大学

解答

(1) O, O' がそれぞれ円 S, S' の中心であることより

$$OA = OP, O'P = O'Q$$

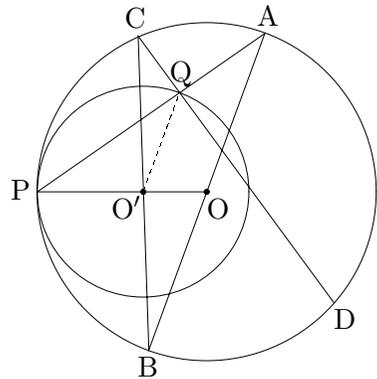
であるから、

$$\angle OAP = \angle OPA = \angle O'PQ = \angle O'QP$$

2直線 AO, QO' に対する同位角の大きさが等しいことより

$$AO \parallel QO'$$

(証明おわり)



(2) 円周角の性質より

$$\angle BAP = \angle BCP = \angle O'CP$$

$AO \parallel QO'$ より

$$\angle BAP = \angle O'QP$$

であるから

$$\angle O'CP = \angle O'QP$$

よって、4点 P, O', Q, C は同一円周上にあるから

$$\angle O'PQ = \angle C'CQ \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$OP = OA$ より

$$\angle BAP = \angle OAP = \angle OPA = \angle O'PQ \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①かつ②より

$$\angle DCB = \angle O'CQ = \angle O'PQ = \angle BAP$$

同じ円 S における弧 $DB, 弧 BP$ に対する円周角の大きさは等しいから

$$DB = BP$$

(証明おわり)