

図チャレ 第 140 回 (2013 年 5 月)

一辺の長さが 1 の正四面体 $OABC$ がある。辺 OB を 2 : 1 に外分する点を B' 、辺 OC を 3 : 2 に外分する点を C' とする。すなわち、

$$\overrightarrow{OB'} = 2\overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OC'} = 3\overrightarrow{OC}$$

とする。

$$AB' = \sqrt{\boxed{\text{ア}}}, \quad AC' = \sqrt{\boxed{\text{イ}}}, \quad B'C' = \sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$$

であり、 $\triangle AB'C'$ の面積は $\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ である。四角錐 $A-BB'C'C$

の体積は $\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ である。点 O を中心とする球が $\triangle AB'C'$ を含む平面と点 H で接しているとき、

$$OH = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$$

である。

$\triangle ABC$ の重心を G とする。直線 OG が $\triangle AB'C'$ と交わる点を G' とすると、

$$\overrightarrow{OG'} = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\overrightarrow{OG}$$

である。

出典：2013 年 上智大学 理工学部

解答

$OB = 2OA$, $\angle AOB = 60^\circ$ より

$$AB' = \sqrt{3} OA = \sqrt{\boxed{3}} \quad (\text{ア})$$

$\triangle OAC'$ において余弦定理より

$$AC' = \sqrt{1^2 + 3^2 - 2 \times 1 \times 3 \times \cos 60^\circ} = \sqrt{\boxed{7}} \quad (\text{イ})$$

$\triangle OB'C'$ において余弦定理より

$$B'C' = \sqrt{2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos 60^\circ} = \sqrt{\boxed{7}} \quad (\text{ウ})$$

$AC' = B'C'$ より, AB' の中点を M とすると

$$AB' \perp MC'$$

であり,

$$MC' = \sqrt{AC'^2 - AM^2} = \sqrt{7 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{28 - 3} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \triangle AB'C' = \frac{1}{2} \cdot AB' \cdot MC' = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{5}{2} = \frac{\boxed{5}}{\boxed{4}} \sqrt{\boxed{3}} \quad \begin{matrix} (\text{エ}) \\ (\text{カ}) \\ (\text{オ}) \end{matrix}$$

四角形 $BCC'B'$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \triangle BB'C + \triangle B'C'C \\ &= \frac{1}{2} \cdot BB' \cdot BC \cdot \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \cdot C'C \cdot B'C \\ &= \frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 2 \times \tan 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

A から面 OBC におろした垂線の足 D は ($AO = AB = AC$ より $\triangle OBC$ の外心となるが,) 正三角形 OBC の重心であるから,

$$OD = (1 \times \sin 60^\circ) \times \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

直角三角形 OAD において三平方の定理より

$$h = AD = \sqrt{OA^2 - OD^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

四角錐 $A-BB'C'C$ の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \times \frac{5\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\boxed{5}}{\boxed{12}} \sqrt{\boxed{2}} \quad \begin{matrix} (\text{キ}) \\ (\text{ク}) \end{matrix}$$

HはOから平面AB'C'におろした垂線の足であるから，三角錐OAB'C'の体積を2通りに表すと

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \triangle AB'C' \cdot OH &= \frac{1}{3} \cdot \triangle OB'C' \cdot AD \\ \frac{5\sqrt{3}}{4} OH &= \frac{1}{2} \cdot OC' \cdot B'C \cdot AD = \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \therefore OH &= \frac{\boxed{2}}{\boxed{5}} \sqrt{\boxed{6}} \end{aligned}$$

(コ) (シ) (サ)

Gは△ABCの重心であるから

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{OC}$$

G'は直線OG上の点であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG'} &= k \overrightarrow{OG} \quad (k \text{ は実数}) \\ &= k \left(\frac{1}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{OC} \right) \\ &= \frac{k}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{k}{3} \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{OB'} \right) + \frac{k}{3} \left(\frac{1}{3} \overrightarrow{OC'} \right) \\ &= \frac{k}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{k}{6} \overrightarrow{OB'} + \frac{k}{9} \overrightarrow{OC'} \end{aligned}$$

と表され，G'は平面AB'C'上の点でもあるから

$$\frac{k}{3} + \frac{k}{6} + \frac{k}{9} = 1 \quad \therefore k = \frac{\boxed{18}}{\boxed{11}} \begin{matrix} \text{(ス)} \\ \text{(セ)} \end{matrix}$$