

## 図チャレ 第142回(2013年7月)

○を原点とする座標平面上において、線型変換  $f$  が任意の点  $P, Q$  に対して

$$f(\overrightarrow{OP}) \cdot f(\overrightarrow{OQ}) = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$$

を満たすとき、 $f$  の表現行列を求めよ。

解答

必要条件として、

$$|\overrightarrow{OP}| = 1 \text{ のとき } f(\overrightarrow{OP}) \cdot f(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP} = 1$$

が成り立つから、 $f$  により

$$\text{円 } x^2 + y^2 = 1 \text{ は円 } x^2 + y^2 = 1 \text{ 上に移される。}$$

$f$  の表現行列を  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  とおくと、任意の実数  $\theta$  に対して

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \text{ かつ } (x')^2 + (y')^2 = 1$$

を満たすことが必要であり、

$$(a \cos \theta + b \sin \theta)^2 + (c \cos \theta + d \sin \theta)^2 = 1$$

$$\therefore (a^2 + c^2) \cos^2 \theta + 2(ab + cd) \sin \theta \cos \theta + (b^2 + d^2) \sin^2 \theta = 1$$

$\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$  のときを考えて、

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 & \dots\dots \text{①} \\ b^2 + d^2 = 1 & \dots\dots \text{②} \\ ab + cd = 0 & \dots\dots \text{③} \end{cases}$$

①より

$$a = \cos \alpha, \quad c = \sin \alpha \quad (\alpha \text{ は実数定数}) \quad \dots\dots \text{④}$$

とおくことができ、③より

$$b = -k \sin \alpha, \quad d = k \cos \alpha \quad (k \text{ は実数定数}) \quad \dots\dots \text{⑤}$$

と表される。②より  $k = \pm 1$  に限られるから、④、⑤より

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ または } A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \quad \dots\dots (*)$$

このとき、 $f$  は

「原点を中心とする回転変換」または「原点を通る直線に関する対称変換」を表し、いずれの場合も

$$f \text{ により } |\overrightarrow{OP}|, |\overrightarrow{OQ}|, \angle POQ \text{ が保存される}$$

から、 $f(\overrightarrow{OP}) \cdot f(\overrightarrow{OQ}) = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$  を満たす。

したがって、行列  $A$  で表される線型変換  $f$  が  $f(\overrightarrow{OP}) \cdot f(\overrightarrow{OQ}) = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$  を満たすための必要十分条件は (\*) であり、求める行列は

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ または } \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \quad (\text{答})$$