

図チャレ 第143回 (2013年8月)

一辺の長さ1の正八面体 A の各辺に接する球を B とする。

- (1) 球 B の半径 R を求めよ。
- (2) A と B の共通部分の体積 V を求めよ。

解答

- (1) 座標空間内の6点 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$, $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を頂点とするように正八面体 A を置くことができる。

このとき、球 B の中心は原点 $O(0, 0, 0)$ であり、半径 R は、 xy 平面上で原点と直線 $x + y - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$ の距離にあたるから、

$$R = \frac{\left|0 + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

- (2) 正八面体 A の各面による球 B の切り口 C は、一辺の長さ1の正三角形の内接円の半径である。その半径を r とおき、正三角形の面積を2通りに表すと

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot r \times 3 = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin 60^\circ \quad \therefore r = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

よって、球 B の中心から正八面体 A の各面までの距離 d は

$$d = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

球 B の正八面体 A の外側にある部分の1つの体積は、領域

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad x \geq \frac{1}{\sqrt{6}}$$

の体積と等しく、その体積を v とすると

$$\begin{aligned} v &= \int_{\frac{1}{\sqrt{6}}}^{\frac{1}{2}} \pi \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^2 - x^2 \right\} dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{4}x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{\frac{1}{\sqrt{6}}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \pi \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24} \right) - \frac{\pi}{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{18} \right) = \frac{\pi}{12} - \frac{7}{36\sqrt{6}}\pi \end{aligned}$$

求める体積 V は

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - 8v = \left(\frac{7\sqrt{6}}{27} - \frac{1}{2} \right) \pi \quad (\text{答})$$