

## 図チャレ 第144回(2013年9月)

四角形 ABCD に内接する円があり，辺 AB, BC, CD, DA とそれぞれ点 E, F, G, H で接している。このとき，4 点 A, B, C, D が同一円周上にあることと，EG と FH が直交することとは同値であることを証明せよ。

コメント：おそらく有名問題であると思われるが，あまり見かけないので出題しました。

### 解答

円の外部の点から引いた接線の長さは等しいから

$$AE = AH, \quad CF = CG$$

であり，それを踏まえて

$$\alpha = \angle AEH = \angle AHE$$

$$\beta = \angle CFG = \angle CGF$$

とおく。

三角形の内角の大きさの和は  $180^\circ$  であるから

$$\angle A = 180^\circ - 2\alpha$$

$$\angle C = 180^\circ - 2\beta$$

接弦定理より

$$\angle EFH = \angle AHE = \alpha$$

$$\angle FEG = \angle CGF = \beta$$

線分 EG と線分 FH の交点を K とおくと，

「4 点 A, B, C, D が同一円周上にある」

$$\iff \angle A + \angle C = (180^\circ - 2\alpha) + (180^\circ - 2\beta) = 180^\circ$$

$$\iff \alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\iff \angle EKF = 90^\circ$$

$$\iff EG \perp FH$$

(証明おわり)

