

図チャレ 第145回 (2013年10月)

xy 平面上に2点 $A(1, 0)$, $B(2, 0)$ と直線 $\ell: y = mx$ ($m \neq 0$) があり, ℓ 上に動点 P をとる。

- (1) 2線分の長さの和 $AP + BP$ の最小値を m で表せ。
- (2) (1)において最小値を与える点 P を P_m とする。実数 m ($\neq 0$) を変化させるとき, 点 P_m の軌跡を求めよ。

解答

- (1) 点 A の ℓ に関する対称点を $A'(a, b)$ とおくと, AA' の中点は ℓ 上にあるから

$$\frac{b+0}{2} = m \cdot \frac{a+1}{2} \quad \therefore ma - b = -m \quad \dots\dots ①$$

$\overrightarrow{AA'} = (a-1, b)$ は ℓ に垂直であるから

$$1 \cdot (a-1) + mb = 0 \quad \therefore a + mb = 1 \quad \dots\dots ②$$

①かつ②を解いて,

$$A' \left(\frac{1-m^2}{1+m^2}, \frac{2m}{1+m^2} \right)$$

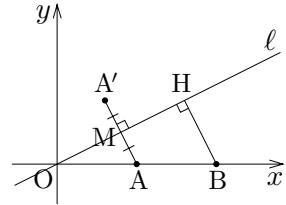
$AP = A'P$ であり, A' と B は ℓ に関して反対側に

あるから, $AP + BP = A'P + BP$ は

P が $A'B$ と ℓ の交点のとき最小

であり, 最小値は

$$\begin{aligned} A'B &= \sqrt{\left(\frac{1-m^2}{1+m^2} - 2\right)^2 + \left(\frac{2m}{1+m^2} - 0\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{9m^4 + 10m^2 + 1}}{m^2 + 1} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



- (2) AA' の中点を M , B から ℓ におろした垂線の足 H とすると

$$AM : BH = OA : OB = 1 : 2$$

$\triangle A'MP_m$ $\triangle BHP_m$ より

$$A'P_m : BP_m = A'M : BH = AM : BH = 1 : 2$$

$AP_m = A'P_m$ より点 P_m はアポロニウスの円を描き, $m \neq 0$ を考えると, 点 P_m の軌跡は,

AB を $1:2$ に内分する点 $D\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ と外分する点 $O(0, 0)$

を直径とする円から2点 D, O を除いた図形 (答)

である。