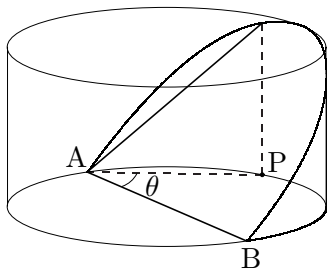


図チャレ 第146回(2013年11月)

底面が半径1の円、高さが1の直円柱がある。底面の1つの直径ABを通り、底面と 45° をなす平面でこの直円柱を2つに分けたときの小さい方の図形を K とする。点Aを通り、底面に垂直な平面を α とするとき、 α による K の切り口の面積を S とする。

- (1) 底面の円弧ABと平面 α の交点をPとし、 $\angle PAB = \theta$ とするとき、 S を θ を用いて表せ。
 (2) S の最大値を求めよ。



解答

- (1) ABの中点をO、点Pから線分ABにおろした垂線の足をHとすると、

$$\angle OAP = \angle OPA = \theta$$

より

$$\angle AOP = \pi - 2\theta$$

$$PH = OP \sin(\pi - 2\theta) = \sin 2\theta$$

α による K の切り口はAPを一辺とする直角三角形となり、残りの頂点をQとすると、 $\angle APQ = 90^\circ$ 、 $\angle PHQ = 45^\circ$ を考え、

$$AP = 2OA \cos \theta = 2 \cos \theta$$

$$PQ = PH \tan 45^\circ = \sin 2\theta$$

であるから、

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \theta \cdot \sin 2\theta = \cos \theta \sin 2\theta \quad (\text{答})$$

- (2) 2倍角の公式および $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ により

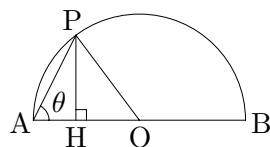
$$S = \cos \theta \cdot 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 2 \sin \theta \cos^2 \theta$$

$$= 2 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta)$$

$x = \sin \theta$ とおくと、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より

$$0 < x < 1$$



であり,

$$S = 2x(1 - x^2) = 2x - 2x^3$$

x の関数として微分すると

$$\frac{dS}{dx} = 2 - 6x^2 = -6\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

x	(0)	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	(1)	
$\frac{dS}{dx}$		+	0	-
S	(0)	↗	極大	↘ (0)

よって, S は $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき極大かつ最大であり, S の最大値は

$$2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9} \quad (\text{答})$$