

図チャレ 第147回(2013年12月)

正三角形 ABC の辺 AB 上に点 D を任意にとり、線分 AD, BD をそれぞれ一辺とする正三角形 ADE および正三角形 BDF を正三角形 ABC の外側に作る。△ABC, △ADE, △BDF の内心をそれぞれ I, J, K とする。

- (1) △AIJ と △ACD は相似であることを示せ。
- (2) 線分 IJ と線分 IK は長さが等しいことを示せ。

解答

- (1) $\angle IAB = \angle IAC$, $\angle BAC = 60^\circ$ より
 $\angle IAC = 30^\circ$

正三角形の内心は外心でもあるから、

$$IA = IC, \angle IAC = \angle ICA = 30^\circ$$

同様に、正三角形 ADE においても

$$JA = JE, \angle JAE = \angle JEA = 30^\circ$$

であるから、

$$\triangle IAC \sim \triangle JEA$$

この相似比は △ABC と △AED の相似比に等しいから

$$AI : AC = EJ : EA$$

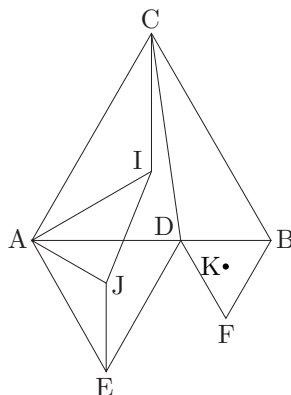
であるが、 $EJ = AJ$, $EA = AD$ であるから

$$AI : AC = AJ : AD$$

$\angle IAJ = \angle BAI + \angle BAJ = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$, $\angle CAD = 60^\circ$ であるから

$$\triangle AIJ \sim \triangle ACD$$

(証明おわり)



- (2) (1)より

$$\frac{IJ}{AI} = \frac{CD}{AC} \quad \therefore IJ = \frac{AI}{AC} CD$$

(1)と同様にして、△BIK ∼ △BCD であるから

$$\frac{IK}{BI} = \frac{CD}{BC} \quad \therefore IK = \frac{BI}{BC} CD$$

$AC = BC$, $AI = BI$ より

$$IJ = IK$$

(証明おわり)