

図チャレ 第148回(2014年1月)

点(26, 26)から円 $x^2 + y^2 = 26$ に引いた2接線との接点の座標を求めよ。

解答

O(0, 0), A(26, 26)とおく。

2つの接点は, 直線OA: $y = x$ に関して対称であるから,

$$a^2 + b^2 = 26 \quad \dots\dots ①$$

を満たす実数 a, b を用いて

$$(a, b), (b, a)$$

とおくことができる。それぞれの点における接線

$$ax + by = 26, \quad bx + ay = 26$$

はともに点Aを通るから

$$26a + 26b = 26 \quad \therefore a + b = 1 \quad \dots\dots ②$$

①, ②より

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)}{2} = \frac{1^2 - 26}{2} = -\frac{25}{2} \quad \dots\dots ③$$

①, ②より, a, b を2解とする2次方程式は

$$t^2 - t - \frac{25}{2} = 0$$

これを解くと

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{51}}{2}$$

であるから, 2つの接点の座標は

$$\left(\frac{1 + \sqrt{51}}{2}, \frac{1 - \sqrt{51}}{2} \right), \left(\frac{1 - \sqrt{51}}{2}, \frac{1 + \sqrt{51}}{2} \right) \quad (\text{答})$$

(別法) OAを直径とする円

$$x(x - 26) + y(y - 26) = 0 \quad \dots\dots ④$$

と円

$$x^2 + y^2 = 26 \quad \dots\dots ⑤$$

の交点が求める2接点であるとして, 座標を求めてもよい。

⑤ - ④より

$$26x + 26y = 26$$

が得られるから, 以下の計算は上の解答と同じである。