

図チャレ 第 149 回 (2014 年 2 月)

xy 平面の放物線 $y = x^2$ 上の点 P, Q, R が次の条件をみたしている。

$\triangle PQR$ は一辺の長さ a の正三角形であり, 点 P, Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

このとき, a の値を求めよ。

出典: 2004 年 東京大学

解答

$P(p, p^2), Q(q, q^2) R(r, r^2)$ とおく。ここで, $p < q$ であるとして一般性を失わない。直線 PQ の傾きは $\sqrt{2}$ で PQ の長さは a であるから,

$$\begin{aligned}\vec{PQ} &= (q - p, q^2 - p^2) \\ &= \frac{a}{\sqrt{3}}(1, \sqrt{2}) \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

\vec{PQ} の方向角を θ とおくと

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

であり, 加法定理より

$$\begin{aligned}\cos(\theta + 60^\circ) &= \cos \theta \cos 60^\circ - \sin \theta \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 - \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} \\ \sin(\theta + 60^\circ) &= \sin \theta \cos 60^\circ + \cos \theta \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

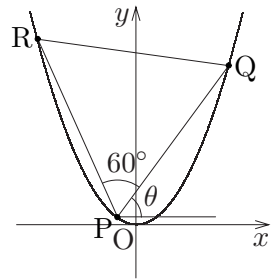
であるから, $\triangle PQR$ が正三角形であることより

$$\begin{aligned}\vec{PR} &= (r - p, r^2 - p^2) = a(\cos(\theta + 60^\circ), \sin(\theta + 60^\circ)) \\ &= \frac{a}{2\sqrt{3}}(1 - \sqrt{6}, \sqrt{2} + \sqrt{3}) \quad \dots\dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

①において, q^2 を 2 通りに表すことにより q を消去すると

$$\begin{aligned}\left(p + \frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 &= p^2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a \\ \therefore \frac{2}{\sqrt{3}}ap + \frac{a^2}{3} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a \quad \dots\dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

②において, r^2 を 2 通りに表すことにより r を消去すると



$$\left(p + \frac{1 - \sqrt{6}}{2\sqrt{3}}a\right)^2 = p^2 + \frac{a}{2\sqrt{3}}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

$$\therefore \frac{1 - \sqrt{6}}{\sqrt{3}}ap + \frac{(1 - \sqrt{6})^2}{12}a^2 = \frac{a}{2\sqrt{3}}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \quad \dots\dots ④$$

④, ③より p を(実際には ap の項を)消去して

$$\frac{a}{2\sqrt{3}}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \frac{7 - 2\sqrt{6}}{12}a^2 = \frac{1 - \sqrt{6}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a - \frac{a^2}{3}\right)$$

$$2\sqrt{3}a(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - (7 - 2\sqrt{6})a^2 = 2\sqrt{6}(1 - \sqrt{6})a - 2(1 - \sqrt{6})a^2$$

$$6a - 7a^2 = -12a - 2a^2$$

$$5a^2 - 18a = 0$$

$a > 0$ より

$$a = \frac{18}{5} \quad (\text{答})$$