

## 図チャレ 第150回(2014年3月)

鋭角三角形  $\triangle ABC$  について,  $\angle A, \angle B, \angle C$  の大きさを, それぞれ  $A, B, C$  とする。  $\triangle ABC$  の重心を  $G$ , 外心を  $O$  とし, 外接円の半径を  $R$  とする。

- (1)  $A$  と  $O$  から辺  $BC$  に下ろした垂線を, それぞれ  $AD, OE$  とする。このとき,

$$AD = 2R \sin B \sin C, \quad OE = R \cos A$$

を証明せよ。

- (2)  $G$  と  $O$  が一致するならば  $\triangle ABC$  は正三角形であることを証明せよ。

- (3)  $\triangle ABC$  が正三角形でないとし, さらに  $OG$  が  $BC$  と平行であるとする。このとき,

$$AD = 3OE, \quad \tan B \tan C = 3$$

を証明せよ。

出典: 2014年 九州大学

### 解答

- (1)  $\triangle ABC$  において正弦定理より

$$2R = \frac{AB}{\sin C}$$

直角三角形  $ABD$  において

$$AD = AB \sin B = 2R \sin B \sin C$$

$OB$  の延長と外接円との交点を  $F$  とすると, 円周角の性質より

$$\angle BCF = 90^\circ$$

$$\angle BOE = \angle BFC = \angle BAC = \angle A$$

直角三角形  $OBE$  において

$$OE = OB \cos \angle BOE = R \cos A \quad (\text{証明おわり})$$

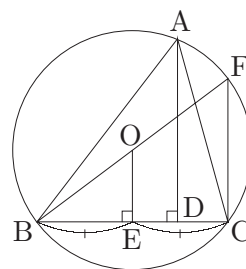
- (2) 重心  $G$  は中線の交点, 外心  $O$  は各辺の垂直二等分線の交点であるから,  $G$  と  $O$  が一致するならば, 各頂点は対辺の垂直二等分線上にあり, 3 辺の長さはすべて等しくなる。よって, 重心と外心が一致する三角形は正三角形である。 (証明おわり)

- (3) (2)より,  $\triangle ABC$  が正三角形でないとき

$$O \neq G$$

$OG$  の延長と  $AD$  の交点を  $H$  とすると

$$OE = HD$$



であり,  $GH \parallel ED$  より

$$AD : OE = AD : HD = AE : GE$$

Gは重心で  $AE = 3GE$  であるから

$$AD = 3OE$$

(1)より

$$2R \sin B \sin C = 3R \cos A$$

補角の公式と加法定理より

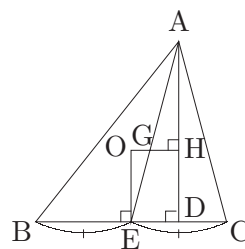
$$\begin{aligned} \cos A &= \cos(180^\circ - B - C) \\ &= -\cos(B + C) \\ &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \end{aligned}$$

であるから,

$$2 \sin B \sin C = -3 \cos B \cos C + 3 \sin B \sin C$$

$$\sin B \sin C = 3 \cos B \cos C$$

$$\therefore \tan B \tan C = \frac{\sin B}{\cos B} \cdot \frac{\sin C}{\cos C} = 3$$



(証明おわり)