

図チャレ 第151回(2014年4月)

a を正の定数とする. $AB = a$, $AC = 2a$, $\angle BAC = \frac{2}{3}\pi$ である $\triangle ABC$ と, $|2\vec{AP} - 2\vec{BP} - \vec{CP}| = a$ を満たす動点 P がある. このとき, 次の問いに答えよ.

問1 辺 BC を $1:2$ に内分する点を D とするとき, $|\vec{AD}|$ を求めよ.

問2 $|\vec{AP}|$ の最大値を求めよ.

問3 線分 AP が通過してできる図形の面積 S を求めよ.

出典: 2014年 旭川医科大学

解答

問1 $AB : AC = BD : DC = 1 : 2$

であるから, AD は $\angle BAC$ の二等分線であり,

$$\angle BAD = \angle CAD = \frac{\pi}{3}$$

$AD = x$ とおき, $\triangle ABC$ の面積を 2 通りに表すと

$$\frac{1}{2}ax \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a \sin \frac{2}{3}\pi$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ より}$$

$$ax + 2ax = 2a^2 \quad \therefore |\vec{AD}| = x = \frac{2}{3}a \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned} \text{問2} \quad 2\vec{AP} - 2\vec{BP} - \vec{CP} &= 2\vec{AP} - 2(\vec{AP} - \vec{AB}) - (\vec{AP} - \vec{AC}) \\ &= 2\vec{AB} + \vec{AC} - \vec{AP} \\ &= 3\vec{AD} - \vec{AP} \end{aligned}$$

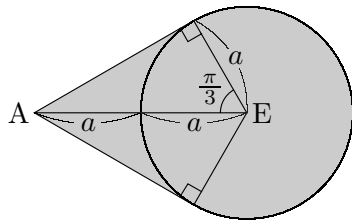
$$|2\vec{AP} - 2\vec{BP} - \vec{CP}| = a \text{ より}$$

$$|\vec{AP} - 3\vec{AD}| = a$$

点 P の軌跡は, $3\vec{AD} = \vec{AE}$ で表される点 E を中心とする半径 a の円であるから, $|\vec{AP}|$ の最大値は

$$|\vec{AE}| + a = 3 \times \frac{2}{3}a + a = 3a \quad (\text{答})$$

問 3 問 2 の考察より，線分 AP が通過してできる図形は次図のようになる。



面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a \cdot \sin \frac{\pi}{3} \times 2 + \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{4}{3} \pi = \left(\sqrt{3} + \frac{2}{3} \pi \right) a^2 \quad (\text{答})$$