

図チャレ 第152回(2014年5月)

三角形ABCを $AB=AC$ かつ $AB>BC$ である二等辺三角形とする．辺AB上の点Dを，三角形ABCと三角形CDBが相似となるようにとる．三角形ABCの外心をO，三角形ADCの外心をPとする．以下の問いに答えよ．

- (1) 点Pは三角形ADCの外部にあることを示せ．
- (2) 四角形AOCPにおいて， $\angle AOC = \angle APC$ であることを示せ．
- (3) 三角形CDBの外心は，三角形ADCの外接円の周上にあることを示せ．

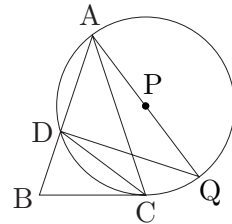
出典：2014年 奈良女子大学 生活環境学部

解答

- (1) $AB=AC$ と $\triangle ABC \sim \triangle CDB$ より
 $BC = DC \quad \therefore \angle CBD = \angle CDB$

$\angle CDB$ は鋭角であるから
 $\angle ADC$ は鈍角

である。以下，鈍角三角形の外心が三角形の外部にあることを示す。



APの延長と $\triangle ACD$ の外接円との交点をQとすると，AQは直径であるから，
 $\angle ADQ = 90^\circ < \angle ADC$

円周角の性質より

$$\angle AQD = \angle ACD$$

であり，どの三角形も内角の大きさの和は 180° であるから

$$\angle DAQ > \angle DAC$$

中心PはAQ上にあるから，点Pは $\triangle ADC$ の外部にある。

(証明おわり)

- (2) 中心角と円周角の関係を考えて

$$\angle AOC = 2\angle ABC \quad \dots\dots ①$$

$$\angle APC = 2\angle AQC \quad \dots\dots ②$$

$BC = CD$ より

$$\angle ABC = \angle BDC \quad \dots\dots ③$$

四角形ADCQは1つの円に内接するから対角は互いに補角であり，

$$\angle AQC = 180^\circ - \angle ADC = \angle BDC \quad \dots\dots ④$$

①, ②, ③, ④より

$$\angle AOC = 2\angle ABC = 2\angle BDC = 2\angle AQC = \angle APC$$

(証明おわり)

(3) $\triangle ABC \cong \triangle CDB$ であるから, $\triangle CDB$ の外心を R とすると
 $\angle DRC = \angle AOC$ ⑤

$OA = OC$ より $\angle OAC = \angle OCA$ であるから
 $\angle AOC = 180^\circ - 2\angle OAC$ ⑥

$\angle OAB = \angle OAC$ より
 $2\angle OAC = \angle DAC$ ⑦

⑤, ⑥, ⑦より
 $\angle DRC = 180^\circ - \angle DAC$

よって, 4点 A, D, R, C は同一円周上にあり, 特に $\triangle CDB$ の外心 R は $\triangle ADC$ の
外接円上にある。 (証明おわり)