

図チャレ 第 153 回 (2014 年 6 月)

xyz 空間において, xy 平面に原点 $O(0, 0, 0)$ で接し, 中心が $C(0, 0, 1)$ であるような球面を S とする。点 $P(2\sqrt{3}, 0, 3)$ に点光源をおくとき, xy 平面上にできる S の影 S' を考える。

- (1) 点 P から球面 S に引いた接線のひとつと球面との接点を A とする。線分 PA の長さは $\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ である。 $\angle CPA = \theta$ とすると,

$$\sin \theta = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

- (2) 球面 S 上で光が当たる部分と影の部分との境界は,

$$\left(\frac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}, \boxed{\text{シ}}, \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \right) \text{ を中心とし, 半径が } \frac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}} \text{ の円である。}$$

- (3) 影 S' は長軸の長さが $\boxed{\text{チ}} \sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$ の楕円の内部である。

出典：2014 年 上智大学 理工学部

解答

- (1) 2 点間の距離公式より

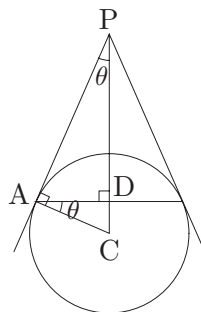
$$PC = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 0^2 + 2^2} = 4$$

点 A が接点であることより $\angle CAP = 90^\circ$ であり, 直角三角形 ACP において三平方の定理より

$$\begin{aligned} PA &= \sqrt{PC^2 - AC^2} \\ &= \sqrt{4^2 - 1^2} \\ &= \sqrt{\boxed{15}} \text{ (キ)} \end{aligned}$$

$\angle CPA = \theta$ とすると,

$$\sin \theta = \frac{AC}{PC} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{4}} \text{ (ク)}$$



- (2) 球面 S 上で光と影の境界線の円の中心を D とすると, D は線分 CP 上にあり, $\angle ADC = 90^\circ$, $\angle CAD = \theta$ である。直角三角形 ACD において

$$AD = AC \cos \theta = 1 \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{4}} \text{ (ツ)}$$

$$CD = AC \sin \theta = \frac{1}{4}$$

であるから,

$$CD : DP = \frac{1}{4} : \left(4 - \frac{1}{4}\right) = 1 : 15$$

分点公式より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= \frac{15\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}}{1 + 15} \\ &= \frac{15}{16}(0, 0, 1) + \frac{1}{16}(2\sqrt{3}, 0, 3) = \left(\frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{8}}, \frac{\boxed{0}}{\boxed{8}}, \frac{\boxed{9}}{\boxed{8}} \right) \end{aligned}$$

(3) 影 S' の境界線上の点 $Q(x, y, 0)$ とすると,

$$\angle CPQ = \theta \text{ または } 180^\circ - \theta$$

であるから,

$$\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PQ} = \pm |\overrightarrow{PC}| |\overrightarrow{PQ}| \cos \theta$$

が成り立つ。

$$\overrightarrow{PC} = (-2\sqrt{3}, 0, -2), \quad \overrightarrow{PQ} = (x - 2\sqrt{3}, y, -3)$$

であるから,

$$\begin{aligned} &\{-2\sqrt{3}(x - 2\sqrt{3}) + 0 - 2 \times (-3)\}^2 \\ &= (12 + 0 + 4) \times \{(x - 2\sqrt{3})^2 + y^2 + 9\} \times \frac{15}{16} \end{aligned}$$

$$12(x - 2\sqrt{3} - \sqrt{3})^2 = 15\{(x - 2\sqrt{3})^2 + y^2 + 9\}$$

$$(x - 2\sqrt{3})^2 + 8\sqrt{3}(x - 2\sqrt{3}) + 5y^2 + 33 = 0$$

$$(x - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3})^2 + 5y^2 = 15$$

$$\therefore \frac{(x + 2\sqrt{3})^2}{15} + \frac{y^2}{3} = 1$$

よって, 影 S' の境界線は, xy 平面上で

$$\text{中心}(-2\sqrt{3}, 0), \text{長軸の長さ} \frac{\boxed{2}}{\boxed{(\text{チ})}} \sqrt{\frac{\boxed{15}}{\boxed{(\text{ツ})}}}, \text{短軸の長さ} 2\sqrt{3} \text{ の楕円}$$

である。