

図チャレ 第154回(2014年7月)

- (1) ω を1の原始3乗根とするとき, $(\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma)(\alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma)$ を計算せよ。
(2) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = 0$ のとき, 複素数平面上で $\triangle\alpha\beta\gamma$ はどのような三角形か。

解答

- (1) $\omega^3 = 1$ より

$$\omega^3 - 1 = (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$$

$\omega \neq 1$ であるから

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0$$

この2つの関係式を用いて

$$\begin{aligned} & (\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma)(\alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma) \\ &= \alpha^2 + \alpha(\omega\beta + \omega^2\gamma + \omega^2\beta + \omega\gamma) + (\omega\beta + \omega^2\gamma)(\omega^2\beta + \omega\gamma) \\ &= \alpha^2 + \alpha(\omega^2 + \omega)(\beta + \gamma) + \omega^3\beta^2 + (\omega^4 + \omega^2)\beta\gamma + \omega^3\gamma^2 \\ &= \alpha^2 + \alpha(\omega^2 + \omega)(\beta + \gamma) + \beta^2 + (\omega + \omega^2)\beta\gamma + \gamma^2 \\ &= \alpha^2 - \alpha(\beta + \gamma) + \beta^2 - \beta\gamma + \gamma^2 \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

- (2) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = 0$ のとき, (1)より

$$\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma = \alpha + \omega\beta - (1 + \omega)\gamma = \alpha - \gamma + \omega(\beta - \gamma) = 0$$

または

$$\alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma = \alpha + \omega^2\beta - (1 + \omega^2)\gamma = \alpha - \gamma + \omega^2(\beta - \gamma) = 0$$

であり, まとめると

$$\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} = -\omega, -\omega^2$$

- (i) $\omega = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi$ のとき

$$-\omega = \cos\left(\frac{2}{3}\pi - \pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi - \pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right),$$

$$-\omega^2 = \cos\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi\right) = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

- (ii) $\omega = \cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi$ のとき

$$-\omega = \cos\left(\frac{4}{3}\pi - \pi\right) + i \sin\left(\frac{4}{3}\pi - \pi\right) = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3},$$

$$-\omega^2 = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

であるから,

$$\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} = \cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) \quad (\text{複号同順})$$

このことから，辺 $\beta\gamma$ を点 γ のまわりに $\frac{\pi}{3}$ 回転させると辺 $\alpha\gamma$ に重なるから，

$\triangle\alpha\beta\gamma$ は正三角形 (答)

である。

(注) (1)に頼らないで解くならば，次のような考え方もできる。

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha &= \alpha^2 - (\beta + \gamma)\alpha + \beta^2 - \beta\gamma + \gamma^2 \\ &= (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) + \beta^2 - 2\beta\gamma + \gamma^2 \\ &= (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) + (\beta - \gamma)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} = \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta}$$

この式は，

$$\triangle\gamma\beta\alpha \quad \triangle\beta\alpha\gamma$$

であることを意味するから，

$\triangle\alpha\beta\gamma$ は正三角形

である。