

図チャレ 第155回(2014年8月)

座標空間において、連立不等式

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 1, \quad (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq (1+\sqrt{3})^2$$

で表される領域内にある半径1の球体が動き得る範囲 D の体積 V を求めよ。

解答

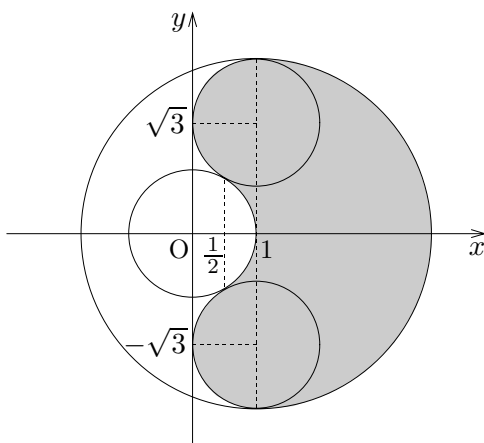
領域 $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1, (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq (1+\sqrt{3})^2$ は

xy 平面上 $x^2 + y^2 \geq 1, (x-1)^2 + y^2 \leq (1+\sqrt{3})^2$ の部分を x 軸のまわりに回転させてできる領域

であるから、題意の領域 D は

xy 平面上 $x^2 + y^2 \geq 1, (x-1)^2 + y^2 \leq (1+\sqrt{3})^2$ 内で

半径1の円板が動き得る範囲 R を x 軸のまわりに回転させてできる空間領域である。 R を図示すると、次のようになる。



$(x-1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 1$ を y について解くと

$$(y-\sqrt{3})^2 = 1 - (x-1)^2 \quad \therefore y = \sqrt{3} \pm \sqrt{1 - (x-1)^2}$$

D の体積 V は

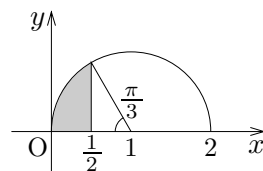
$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi \{ \sqrt{3} + \sqrt{1 - (x-1)^2} \}^2 dx + \frac{4}{3} \pi (1 + \sqrt{3})^3 \times \frac{1}{2} \\ &\quad - \int_0^{\frac{1}{2}} \pi \{ \sqrt{3} - \sqrt{1 - (x-1)^2} \}^2 dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \pi (\sqrt{1 - x^2})^2 dx \\ &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 (3 - x^2 + 2x) dx + 2\sqrt{3} \pi \int_0^1 \sqrt{-x^2 + 2x} dx \\ &\quad + 2\sqrt{3} \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{-x^2 + 2x} dx + \frac{2}{3} \pi (10 + 6\sqrt{3}) - \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - x^2) dx \end{aligned}$$

ここで、

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (3 - x^2 + 2x) dx = \left[3x - \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{\frac{1}{2}}^1 = 3 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} + \frac{3}{4} = \frac{47}{24}$$

$$\int_0^1 \sqrt{-x^2 + 2x} dx = \int_0^1 \sqrt{1 - (x-1)^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{-x^2 + 2x} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - (x-1)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$



$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} = \frac{5}{24}$$

であるから ,

$$\begin{aligned} V &= \pi \left\{ \frac{47}{24} + 2\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{4} + 2\sqrt{3} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) + \frac{2}{3} (10 + 6\sqrt{3}) - \frac{5}{24} \right\} \\ &= \frac{5}{2\sqrt{3}} \pi^2 + \left(\frac{23}{3} + 4\sqrt{3} \right) \pi \quad (\text{答}) \end{aligned}$$