

図チャレ 第157回 (2014年10月)

$f(x) = x^3 - 3(a+1)x^2 + 3(2a+1)x$ とする。

- (1) 関数 $y = f(x)$ の極大値を与える点の軌跡 C_1 を求め、図示せよ。
 (2) 関数 $y = f(x)$ の変曲点の軌跡を C_2 とするとき、 C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

解答

(1) $f'(x) = 3x^2 - 3(2a+1)x + 3(2a+1) = 3(x-1)(x-2a-1)$

$f(x)$ が極値をもつための条件は

$$2a+1 \neq 1, \text{ すなわち } a \neq 0$$

であり、 $2a+1$ と 1 のうち小さい方を α 、大きい方を β とすると

x		α		β	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$f(x)$ の極大値は

$$a < 0 \text{ のとき } f(2a+1) = (2a+1)^2 \{2a+1 - 3(a+1) + 3\} = -(a-1)(2a+1)^2$$

$$a > 0 \text{ のとき } f(1) = 1 - 3(a+1) + 3(2a+1) = 3a+1$$

$x = 2a+1$ のとき

$$a-1 = \frac{x-1}{2} - 1 = \frac{x-3}{2}$$

と表されることを考えて、極大値を与える点の軌跡 C_1 は

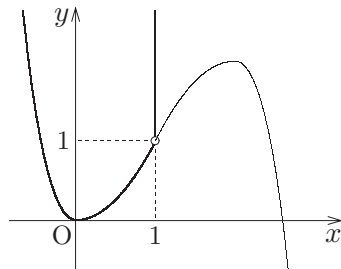
曲線 $y = -\frac{1}{2}x^2(x-3)$ の $x < 1$ の部分と半直線 $x = 1, y > 1$ (答)

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^2(x-3) = -\frac{1}{2}(x^3 - 3x^2) \text{ とおくと,}$$

$$g'(x) = -\frac{1}{2}(3x^2 - 6x) = -\frac{3}{2}x(x-2)$$

x		0		2	
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

軌跡 C_1 の概形は



$$(2) \quad f''(x) = 6x - 3(2a + 2) = 6\{x - (a + 1)\}$$

の符号の変わり目 $x = a + 1$ において, $y = f(x)$ のグラフは凹凸を変える。

$$f(a + 1) = -2(a + 1)^3 + 3(2a + 1)(a + 1)$$

であるから, 関数 $y = f(x)$ の変曲点を (X, Y) とおくと,

$$X = a + 1 \quad \text{かつ} \quad Y = -2X^3 + 3(2X - 1)X = -2X^3 + 6X^2 - 3X$$

$$g(x) - (-2x^3 + 6x^2 - 3x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 3x$$

$$= \frac{3}{2}x(x^2 - 3x + 2)$$

$$= \frac{3}{2}x(x - 1)(x - 2)$$

C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積 S は

$$S = \int_0^1 \{g(x) - (-2x^3 + 6x^2 - 3x)\} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 3x \right) dx$$

$$= \left[\frac{3}{8}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{3}{8} \quad (\text{答})$$