

図チャレ 第159回(2014年12月)

座標空間内に正四面体 ABCD があり, 頂点の座標は A(1, 2, 0), B(-2, 2, 3), C(2, 1, 4), D(a, b, c) ($a > 0$) であるとする。また, L(0, 0, 5) とする。

- (1) 頂点 D の座標を求めよ。
- (2) 3点 B, C, L を通る平面と xy 平面との交わりの直線の方程式を求めよ。
- (3) 点 L に光源を置いたとき, xy 平面上で影になる領域を図示し, その面積を求めよ。

解答

(1) $AD = BD = CD = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 3^2} (= AB)$ より

$$\begin{cases} (a-1)^2 + (b-2)^2 + c^2 = 18 & \dots\dots \textcircled{1} \\ (a+2)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = 18 & \dots\dots \textcircled{2} \\ (a-2)^2 + (b-1)^2 + (c-4)^2 = 18 & \dots\dots \textcircled{3} \end{cases}$$

①かつ②より

$$\begin{aligned} -2a - 4b + 5 &= 4a - 4b - 6c + 17 \\ \therefore a - c + 2 &= 0 & \dots\dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

②かつ③より

$$\begin{aligned} 4a - 4b - 6c + 17 &= -4a - 2b - 8c + 21 \\ \therefore 4a - b + c - 2 &= 0 & \dots\dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

④, ⑤より

$$b = 5a, \quad c = a + 2 \quad \dots\dots \textcircled{6}$$

①に代入して

$$\begin{aligned} (a-1)^2 + (5a-2)^2 + (a+2)^2 &= 18 \\ 27a^2 - 18a - 9 &= 0 \\ 3a^2 - 2a - 1 &= (a-1)(3a+1) = 0 \end{aligned}$$

$a > 0$ より

$$a = 1$$

⑥より b, c も求めて

$$D(1, 5, 3) \quad (\text{答})$$

(注) $\triangle ABC$ の外心(重心)を通り, 平面 ABC に垂直な直線上の点として D をワンパラメータで表示して, $AD = AB$ より求めてもよい。

(2) 平面 BCL 上の点 P は

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OL} + s\vec{LB} + t\vec{LC} \quad (s, t \text{ は実数}) \\ &= (0, 0, 5) + s(-2, 2, -2) + t(2, 1, -1) \\ &= (-2s + 2t, 2s + t, -2s - t + 5) & \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

と表される。点 P が xy 平面との交線上を動くとするれば

$$z = -2s - t + 5 = 0$$

..... ⑧

であるから, s を消去すると

$$\overrightarrow{OP} = (3t - 5, 5, 0)$$

よって, 平面 BCL と xy 平面の交線は

$$y = 5, z = 0 \quad (\text{答})$$

である。

- (3) 直線 LB, LC, LD と xy 平面との交点をそれぞれ B' , C' , D' とすると, ⑦, ⑧
 において $t = 0$ とすることにより

$$B'(-5, 5, 0)$$

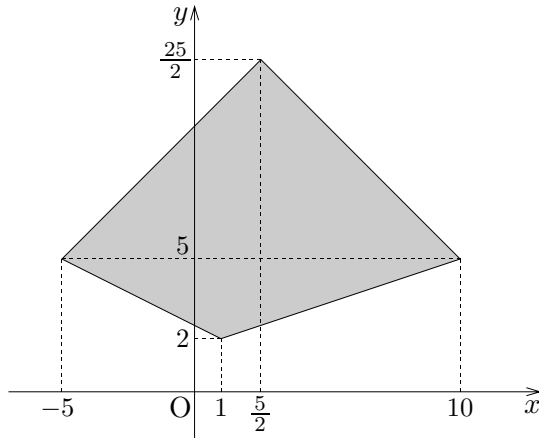
- ⑦, ⑧において $s = 0$ とすることにより

$$C'(10, 5, 0)$$

z 座標に注目すると $LD' : DD' = 5 : 3$ であるから,

$$\overrightarrow{OD'} = \frac{-3\overrightarrow{OL} + 5\overrightarrow{OD}}{5 - 3} = \left(\frac{5}{2}, \frac{25}{2}, 0\right)$$

面 ABC, ABD, ACD, BCD の影はそれぞれ三角形 $AB'C'$, $AB'D'$, $AC'D'$, $B'C'D'$
 なるから, 正四面体の影の領域はこの 4 つの三角形領域をあわせた領域となり, 次
 図の網目部分(境界を含む)となる。



(答)

正四面体の影の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \times (10 + 5) \times \left(\frac{25}{2} - 2\right) = \frac{315}{4} \quad (\text{答})$$