

## 図チャレ 第 160 回 (2015 年 1 月)

3 辺の長さが 3, 4, 5 である三角形の内接円に外接し, 外接円に内接する円の半径の最大値と最小値を求めよ。

解答

座標平面上で三角形の頂点を  $O(0, 0)$ ,  $A(4, 0)$ ,  $B(0, 3)$  として考える。  
 $\triangle OAB$  は直角三角形であるから, 外心は斜辺  $AB$  の中点であり,

$$\text{外心の座標は } \left(2, \frac{3}{2}\right), \text{ 外接円の半径は } R = \frac{1}{2}AB = \frac{5}{2}$$

である。

内接円の半径を  $r$  とおき,  $\triangle OAB$  の面積を 2 通りに表すと

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot r = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \quad \therefore r = 1$$

よって,

$$\text{内心は } (1, 1), \text{ 内接円の半径は } r = 1$$

である。外心と内心の距離  $d$  は

$$d = \sqrt{(2-1)^2 + \left(\frac{3}{2}-1\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

図形的に考えて, 内接円に外接し, 外接円に内接する円の半径の

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{最大値は } \frac{R+d-r}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \\ \text{最小値は } \frac{R-d-r}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \end{array} \right. \quad (\text{答})$$

である。