

図チャレ 第 161 回 (2015 年 2 月)

複素数平面上の原点を O , 複素数 α, β が表す点をそれぞれ A, B とする。3 点 O, A, B は同一直線上にないとき , 次の問いに答えよ。

- (1) $\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} \neq 0$ であることを示せ。ただし , $\bar{\alpha}$ は α と共役な複素数とする。
- (2) 複素数 z が表す点を Z とする。線分 OZ の長さ と線分 AZ の長さが等しいとき , z は $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = |\alpha|^2$ をみたすことを示せ。
- (3) γ を三角形 OAB の外心(外接円の中心)を表す複素数とする。 γ を α と β の式で表せ。

出典 : 2005 年 兵庫県立大学 理学部

解答

- (1) $\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} = 0$ であるとすれば , $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ より

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

このとき $\frac{\alpha}{\beta}$ は実数であり ,

$$\alpha = t\beta \quad (t \text{ は実数})$$

と表され , 3 点 O, A, B が同一直線上にないことに反する。よって ,

$$\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} \neq 0$$

(証明おわり)

- (2) $|z| = |z - \alpha|$ のとき

$$|z|^2 = |z - \alpha|^2$$

$$z\bar{z} = (z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha})$$

$$= z\bar{z} - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + \alpha\bar{\alpha} \quad \therefore \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = |\alpha|^2$$

(証明おわり)

- (別解) $z - \frac{\alpha}{2} \perp \alpha$ ($\alpha \neq 0$) より

$$\overline{\left(\frac{z - \frac{\alpha}{2}}{\alpha}\right)} = -\frac{z - \frac{\alpha}{2}}{\alpha}$$

$$\alpha\left(\bar{z} - \frac{\bar{\alpha}}{2}\right) = -\bar{\alpha}\left(z - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\therefore \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = \frac{1}{2}\alpha\bar{\alpha} \times 2 = |\alpha|^2$$

(証明おわり)

(3) 点 γ は $\triangle OAB$ の外心であるから ,

$$|\gamma| = |\gamma - \alpha| = |\gamma - \beta|$$

(2) を考えて , $|\gamma| = |\gamma - \alpha|$ より

$$\bar{\alpha}\gamma + \alpha\bar{\gamma} = |\alpha|^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$|\gamma| = |\gamma - \beta|$ より

$$\bar{\beta}\gamma + \beta\bar{\gamma} = |\beta|^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \times \beta - \textcircled{2} \times \alpha$ より

$$(\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta})\gamma = |\alpha|^2\beta - \alpha|\beta|^2 = \alpha\beta(\bar{\alpha} - \bar{\beta})$$

(1) より $\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} \neq 0$ であるから ,

$$\gamma = \frac{\alpha\beta(\bar{\alpha} - \bar{\beta})}{\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta}} \quad (\text{答})$$