

図チャレ 第162回 (2015年3月)

放物線 $y = x^2 + 4x$ 上の3点 $A(-4, 0)$, $B(1, 5)$, $P(p, p^2 + 4p)$ ($-4 < p < 1$) を考える。△ABP の外接円 C の中心の座標を (s, t) とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ。
- (2) 線分 AP の垂直二等分線の方程式を求めよ。また、 s を p の式で表せ。
- (3) p が $-4 < p < 1$ の範囲を動くとき、 s のとりうる値の範囲を求めよ。
- (4) p が $-4 < p < 1$ の範囲を動くとき、円 C の半径の最小値とそのときの p の値を求めよ。

出典：2015年 関西学院大学 理工学部

解答

(1) AB の垂直二等分線の方程式は

$$\begin{aligned}(x+4)^2 + y^2 &= (x-1)^2 + (y-5)^2 \\ 8x+16 &= -2x-10y+26 \\ \therefore x+y-1 &= 0 \quad (\text{答})\end{aligned}$$

(2) AP の垂直二等分線の方程式は

$$\begin{aligned}(x+4)^2 + y^2 &= (x-p)^2 + (y-p^2-4p)^2 \\ 8x+16 &= -2px-2(p^2+4p)y+p^2+(p^2+4p)^2 \\ (p+4)x+p(p+4)y - \frac{p^2(p+4)^2+p^2-16}{2} &= 0\end{aligned}$$

$p+4 \neq 0$ より

$$x+py - \frac{p^3+4p^2+p-4}{2} = 0 \quad (\text{答})$$

△ABP の外心 (s, t) は AB の垂直二等分線と AP の垂直二等分線の交点であり、連立方程式

$$\begin{cases} s+t-1=0 & \dots\dots ① \\ s+pt - \frac{p^3+4p^2+p-4}{2} = 0 & \dots\dots ② \end{cases}$$

が成り立つ。①かつ②より t を消去して

$$\begin{aligned}s+p(1-s) - \frac{p^3+4p^2+p-4}{2} &= 0 \\ (1-p)s &= \frac{p^3+4p^2-p-4}{2} = \frac{1}{2}(p+4)(p+1)(p-1)\end{aligned}$$

$p \neq 1$ より

$$s = -\frac{1}{2}(p+4)(p+1) = -\frac{1}{2}p^2 - \frac{5}{2}p - 2 \quad (\text{答})$$

(3) (2)より

$$s = -\frac{1}{2}p^2 - \frac{5}{2}p - 2 = -\frac{1}{2}\left(p + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{8}$$

$-4 < p < 1$ より, s のとりうる値の範囲は

$$-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{8} < s \leq \frac{9}{8}$$

$$\therefore -5 < s \leq \frac{9}{8} \quad (\text{答})$$

(4) AB を直径とする円

$$(x+4)(x-1) + y(y-5) = 0$$

が放物線 $y = x^2 + 4x$ と $-4 < x < 1$ で共有点をもつとき, その共有点を P とする円 C が半径最小となる。 $y = x^2 + 4x$ と連立して y を消去すると

$$(x+4)(x-1) + (x^2+4x)(x^2+4x-5) = 0$$

$$(x+4)(x-1) + x(x+4)(x+5)(x-1) = 0$$

$$\therefore (x+4)(x-1)(x^2+5x+1) = 0$$

$x^2 + 5x + 1 = 0$ を解くと

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

ここで,

$$\frac{-5 - \sqrt{21}}{2} < \frac{-5 - \sqrt{9}}{2} = -4$$

$$\frac{-5 + \sqrt{21}}{2} - (-4) = \frac{3 + \sqrt{21}}{2} > 0$$

$$\frac{-5 + \sqrt{21}}{2} = \frac{-\sqrt{25} + \sqrt{21}}{2} < 0 < 1$$

であるから, AB を直径とする円は

$$p = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}$$

のとき点 P($p, p^2 + 4p$) で放物線 $y = x^2 + 4x$ と $-4 < x < 1$ で共有点をもつ。

$$\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(1+4)^2 + (5-0)^2} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

であるから, 円 C の半径は

$$p = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2} \text{ のとき最小値 } \frac{5}{\sqrt{2}} \quad (\text{答})$$

をとる。