

図チャレ 第163回(2015年4月)

以下の問いに答えよ。

- (1) 平面上に相異なる3点がある。この3点が同一直線上にないとき、この3点を通る円は必ず存在し、かつ、一つだけしかないことを証明せよ。
- (2) 平面上に相異なる3点 A, B, C があり、 A, B 間の距離は、他の2点間の距離より短いとする。このとき、線分 AB を直径とする円は、内部に点 C を含まないことを証明せよ。
- (3) 平面上に相異なる4点がある。この4点が同一円周上になく、かつ、どの3点も同一直線上にないとする。このとき、うまく3点を選ばると、その3点を通る円は、残りの点を内部に含まないようにできることを証明せよ。

出典：2015年 横浜市立大学

解答

- (1) 平面上の同一直線上にない3点を A, B, C とすると、 $AB \not\parallel BC$ であるから、 AB の垂直二等分線 l と BC の垂直二等分線 m は平行でない。よって、 l と m は1点 P で交わり、

$$AP = BP \quad \text{かつ} \quad BP = CP$$

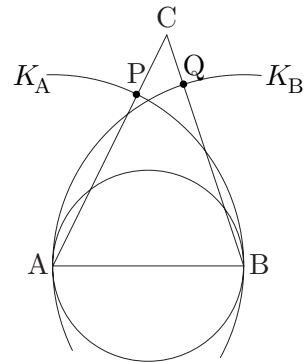
このとき、 P を中心として A, B, C を通る円が1つだけ存在する。

(証明おわり)

- (2) $AB < AC, AB < BC$
 であるから、辺 AC 上に点 P 、辺 BC 上に点 Q を
 $AP = AB = BQ$
 となるようにとることができる。

A を中心として P を通る円を K_A 、 B を中心として Q を通る円を K_B とすると、 AB を直径とする円の内部は K_A と K_B の両方の内部に含まれる。

A と C は P に関して反対側、 B と C は Q に関して反対側にあるから、点 C は K_A, K_B の両方の外部にあり、 AB を直径とする円の外部にある。



(証明おわり)

- (3) 題意の4点を A, B, C, D とし、2点間の距離最小のものを A, B とする。3点 A, B, C も3点 A, B, D も同一直線上にない(三角形の3頂点となる)から、距離最小が A, B 以外にあっても(2)の論法が通用して、

C, D はともに AB を直径とする円の外部にある。よって、

$\angle ACB, \angle ADB$ はともに鋭角

である。4点 A, B, C, D は同一円周上にないから $\angle ACB \neq \angle ADB$ であり, 必要ならば C と D を入れかえて

$$\angle ADB < \angle ACB < 90^\circ$$

としてよい。 C と D が直線 AB に関して反対側にある場合も

$$\angle ADB < \angle ACB < 180^\circ - \angle ACB$$

であるから, いずれの場合も

点 D は 3点 A, B, C を通る円の外部

にある。

(証明おわり)