

図チャレ 第164回(2015年5月)

平面上に長さ2の線分ABを直径とする円Cがある. 2点A, Bを除くC上の点Pに対し, $AP=AQ$ となるように線分AB上の点Qをとる. また, 直線PQと円Cの交点のうち, Pでない方をRとする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $\triangle AQR$ の面積を $\theta = \angle PAB$ を用いて表せ.
- (2) 点Pを動かして $\triangle AQR$ の面積が最大になるとき, \overrightarrow{AR} を \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{AP} を用いて表せ.

出典: 2015年 大阪大学

解答

- (1) $AP=AQ$ より

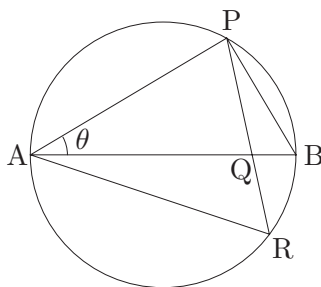
$$\angle APQ = \angle AQP = \frac{\pi - \theta}{2}$$

ABは直径であるから

$$\angle APB = \frac{\pi}{2}$$

円周角の性質より

$$\begin{aligned} \angle BAR &= \angle BPR = \angle APB - \angle APQ \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi - \theta}{2} \\ &= \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$



直角三角形ABPにおいて

$$AQ = AP = AB \cos \angle BAP = 2 \cos \theta$$

同様に, 直角三角形ABRにおいて

$$AR = 2 \cos \frac{\theta}{2}$$

$\triangle AQR$ の面積 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \cdot AQ \cdot AR \cdot \sin \angle BAR \\ &= \frac{1}{2} (2 \cos \theta) \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \right) \sin \frac{\theta}{2} \\ &= \cos \theta \cdot \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\theta \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より

$$0 < 2\theta < \pi$$

であるから, (1)より, $\triangle AQR$ の面積 S_1 は

$$2\theta = \frac{\pi}{2} \text{ で最大}$$

であり,

$$S_1 \text{ の最大値は } \frac{1}{2}$$

このとき, $\triangle APQ$ の面積 S_2 は

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot AP^2 \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \left(2 \cos \frac{\pi}{4} \right)^2 \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\triangle APQ$ と $\triangle AQR$ は点 A から直線 PQ におろした垂線(高さ)が共通であるから,

$$PQ : QR = S_2 : S_1 = \sqrt{2} : 1$$

R は PQ を $\sqrt{2} + 1 : 1$ に外分するから,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AR} &= \frac{-\overrightarrow{AP} + (\sqrt{2} + 1)\overrightarrow{AQ}}{(\sqrt{2} + 1) - 1} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AP} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\overrightarrow{AQ} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AP} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos \frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1 + \sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AP} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$