

## 図チャレ 第165回(2015年6月)

座標空間内に3点  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $C(0, 0, 1)$  をとり, 2つのベクトル  $\overrightarrow{AP}$  と  $\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP}$  の内積が0になるような点  $P(x, y, z)$  の集合を  $S$  とする。3点  $A, B, C$  を通る平面を  $\alpha$  とするとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 集合  $S$  は球面であることを示し, その中心  $Q$  の座標と半径  $r$  の値を求めよ。
- (2) 原点  $O$  から最も遠い距離にある  $S$  上の点の座標を求めよ。
- (3) (1) で求めた点  $Q$  は, 平面  $\alpha$  上にあることを示せ。
- (4) (1) で求めた点  $Q$  を通って平面  $\alpha$  に垂直な直線を  $\ell$  とする。球面  $S$  と直線  $\ell$  のすべての共有点について, その座標を求めよ。

出典：2015年 岡山大学

### 解答

(1)  $\overrightarrow{AP} = (x-1, y, z)$  と

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP} &= (x, y-1, z) + (x, y, z-1) \\ &= (2x, 2y-1, 2z-1) \\ &= 2\left(x, y-\frac{1}{2}, z-\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

の内積が0になるとき,

$$x(x-1) + y\left(y-\frac{1}{2}\right) + z\left(z-\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \dots\dots ①$$

$$\therefore \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{6}{16} \quad \dots\dots ②$$

よって, 集合  $S$  は

$$Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \text{ を中心とする半径 } r = \frac{\sqrt{6}}{4} \text{ の球面 (答)}$$

(2) ①より,  $S$  は原点  $O$  を通る球面であるから,  $S$  上で  $O$  から最も遠い点は  $O$  の直径対点であり,

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (\text{答})$$

(3) 平面  $\alpha$  は3点  $A, B, C$  を通る ( $x$  切片,  $y$  切片,  $z$  切片がそれぞれ1である) から,  $\alpha$  の方程式は

$$x + y + z = 1 \quad \dots\dots ③$$

であり,  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$  であるから, 点  $Q$  は  $\alpha$  上にある。

(証明おわり)

(4) ③より,  $\alpha$ の法線ベクトル( $\ell$ の方向ベクトル)は

$$\vec{v} = (1, 1, 1)$$

$S$ と $\ell$ の共有点Rは

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OQ} \pm \frac{r}{|\vec{v}|} \vec{v} \\ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \pm \frac{\sqrt{2}}{4}(1, 1, 1)\end{aligned}$$

と表されるから, 求める座標は

$$\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}, \frac{1+\sqrt{2}}{4}, \frac{1+\sqrt{2}}{4}\right), \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}, \frac{1-\sqrt{2}}{4}, \frac{1-\sqrt{2}}{4}\right) \quad (\text{答})$$