

図チャレ 第166回 (2015年7月)

xyz 空間において、対角線の長さ2の正方形 R が2条件

- 中心(対角線の交点)が xy 平面上の円 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ の周上
- 2つの対角線は x 軸と z 軸に平行

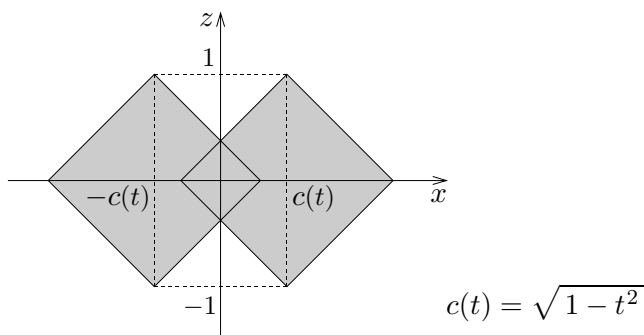
を満たしながら動くとき、正方形 R が通過する範囲 D の体積 V を求めよ。

解答

平面 $y = t$ ($-1 \leq t \leq 1$) と円 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ との交点は

$$(\pm\sqrt{1-t^2}, t, 0)$$

であり、平面 $y = t$ による D の断面は次図の網目部分(境界を含む)となる。



断面積 $S(t)$ は

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} \cdot 2^2 \times 2 - \frac{1}{2} \{2(1 - \sqrt{1-t^2})\}^2 \\ &= 4 - 2(1 - 2\sqrt{1-t^2} + 1 - t^2) \\ &= 2t^2 + 4\sqrt{1-t^2} \end{aligned}$$

D は xz 平面 ($y = 0$) に関して対称であることも考えて、 D の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^1 S(t) dt \\ &= 4 \int_0^1 t^2 dt + 8 \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt \\ &= 4 \times \frac{1}{3} + 8 \times \frac{\pi}{4} \\ &= 2\pi + \frac{4}{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$