

## 図チャレ 第167回 (2015年8月)

$\alpha, \beta$ は0でない相異なる複素数であり, 複素数平面上で3点  $0, \alpha, \beta$  は同一直線上にないものとする。

$$(\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta)(\alpha - \beta) = -\alpha\beta(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \quad \dots\dots ①$$

を満たすとき,  $\triangle 0\alpha\beta$  はどのような三角形か。

解答

①の両辺を  $\alpha^2\bar{\alpha}$  で割ると

$$\left(\frac{\bar{\beta}}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) = -\frac{\beta}{\alpha}\left(1 - \frac{\bar{\beta}}{\alpha}\right)$$

$z = \frac{\beta}{\alpha}$  とおくと

$$(\bar{z} + z)(1 - z) = z(\bar{z} - 1)$$

$$\therefore \bar{z} = \frac{z(z-2)}{1-2z} \quad \dots\dots ②$$

両辺の共役複素数を考えると

$$z = \frac{\bar{z}(\bar{z}-2)}{1-2\bar{z}} \quad \dots\dots ③$$

②かつ③を  $z$  と  $\bar{z}$  の連立方程式とみて,  $\bar{z}$  を消去すると

$$\begin{aligned} z &= \frac{z(z-2)}{1-2z} \cdot \frac{\frac{z(z-2)}{1-2z} - 2}{1 - 2 \cdot \frac{z(z-2)}{1-2z}} \\ &= \frac{z(z-2)}{1-2z} \cdot \frac{z(z-2) - 2(1-2z)}{1-2z - 2z(z-2)} \\ &= z \cdot \frac{z-2}{1-2z} \cdot \frac{z^2 + 2z - 2}{1 + 2z - 2z^2} \end{aligned}$$

$z \neq 0$  より

$$(1-2z)(1+2z-2z^2) = (z-2)(z^2+2z-2)$$

$$4z^3 - 6z^2 + 1 = z^3 - 6z + 4$$

$$3z^3 - 6z^2 + 6z - 3 = 0$$

$$z^3 - 2z^2 + 2z - 1 = 0$$

$$\therefore (z-1)(z^2 - z + 1) = 0$$

$\alpha \neq \beta$  より  $z \neq 1$  であるから

$$z^2 - z + 1 = 0$$

$$\therefore z = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \cos(\pm 60^\circ) + i \sin(\pm 60^\circ) \quad (\text{複号同順})$$

よって,

$\triangle 0\alpha\beta$ は正三角形 (答)

である。

(参考)  $\triangle 0\alpha\beta$ の垂心を $\gamma$ とすると,  $\gamma - \beta \perp \alpha$  より

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{\gamma - \beta}{\alpha}\right)} &= \frac{\bar{\gamma} - \bar{\beta}}{\bar{\alpha}} = -\frac{\gamma - \beta}{\alpha} \\ \therefore \bar{\gamma} &= \bar{\beta} - \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\gamma - \beta) = -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\gamma + \frac{\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta}{\alpha} \quad \dots\dots ④ \end{aligned}$$

同様に,  $\gamma - \alpha \perp \beta$  より

$$\bar{\gamma} = -\frac{\bar{\beta}}{\beta}\gamma + \frac{\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta}{\beta} \quad \dots\dots ⑤$$

であるから, ④かつ⑤より

$$\begin{aligned} -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\gamma + \frac{\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta}{\alpha} &= -\frac{\bar{\beta}}{\beta}\gamma + \frac{\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta}{\beta} \\ \left(\frac{\bar{\beta}}{\beta} - \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\right)\gamma &= (\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta)\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right) \\ \therefore \gamma &= \frac{(\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta)(\alpha - \beta)}{\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta} \end{aligned}$$

$\triangle 0\alpha\beta$ の外心を $\delta$ とすると,  $\delta - \frac{\alpha}{2} \perp \alpha$  より

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{\delta - \frac{\alpha}{2}}{\alpha}\right)} &= \frac{\bar{\delta} - \frac{\bar{\alpha}}{2}}{\bar{\alpha}} = -\frac{\delta - \frac{\alpha}{2}}{\alpha} \\ \therefore \bar{\delta} &= \frac{\bar{\alpha}}{2} - \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\left(\delta - \frac{\alpha}{2}\right) = \bar{\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\delta \quad \dots\dots ⑥ \end{aligned}$$

同様に,  $\alpha - \frac{\beta}{2} \perp \beta$  より

$$\bar{\delta} = \bar{\beta} - \frac{\bar{\beta}}{\beta}\delta \quad \dots\dots ⑦$$

であるから, ⑥かつ⑦より

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\delta &= \bar{\beta} - \frac{\bar{\beta}}{\beta}\delta \\ \left(\frac{\bar{\beta}}{\beta} - \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\right)\delta &= \bar{\beta} - \bar{\alpha} \quad \therefore \delta = \frac{\alpha\beta(\bar{\beta} - \bar{\alpha})}{\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta} \end{aligned}$$

以上からわかる通り, 本問は「垂心と外心が一致する三角形は正三角形」であることを, 複素数の計算で導いたと解釈できる。ただ, この命題そのものは, 初等幾何で示す方が早い。