

## 図チャレ 第168回(2015年9月)

円に内接する四角形PQRSがある。2点P, Qを通り, 点Pにおいて直線PSに接する円を $C_1$ とし, 2点Q, Rを通り, 点Rにおいて直線RSに接する円を $C_2$ とする。円 $C_1$ と円 $C_2$ は線分PR上の点で交わることを示せ。

解答

円 $C_1$ と円 $C_2$ のQと異なる交点をAとおく。  
円 $C_1$ の接弦APについて, 接弦定理を適用すると $\angle APS = \angle AQP$ が成り立ち,

$$\angle APS = \angle AQP = \alpha$$

とおく。

円 $C_2$ の接弦ARについて, 接弦定理を適用すると $\angle ARS = \angle AQR$ が成り立ち,

$$\angle ARS = \angle AQR = \beta$$

とおく。

四角形PQRSは円に内接するから,

$$\angle PSR = 180^\circ - \angle PQR = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

一方,  $\triangle APS$ と $\triangle ARS$ の内角の和を考えると,

$$\begin{aligned} 360^\circ &= \angle PAR + \angle APS + \angle PSR + \angle ARS \\ &= \angle PAR + \alpha + (180^\circ - \alpha - \beta) + \beta \end{aligned}$$

$$\therefore \angle PAR = 180^\circ$$

よって, 3点P, A, Rは同一直線上にあり, 円 $C_1$ と円 $C_2$ の交点Aは線分PR上にある。  
(証明おわり)

(注) 上の命題は逆も成り立つので, 点Aが線分PR上にあることと点Sが $\triangle PQR$ の外接円上にあることは同値である。

