

## 図チャレ 第169回(2015年10月)

$xy$  平面上において, 放物線  $C: y = (x - a)^2 - a^2 + 1$  を考える。

- (1)  $a$  がすべての実数を動くとき,  $C$  が通過する範囲を求めよ。  
 (2)  $a$  が  $-1 \leq x \leq 1$  の範囲を動くとき,  $C$  が通過する範囲を求めよ。

解答

(1)  $C$  の方程式を変形して

$$y = (x - a)^2 - a^2 + 1 = x^2 - 2ax + 1$$

$$\therefore 2xa = x^2 + 1 - y$$

$x = 0$  のとき

$$0 = 0^2 + 1 - y \quad \therefore (x, y) = (0, 1)$$

$x \neq 0$  のとき

$$a = \frac{x^2 + 1 - y}{2x}$$

であり,  $x, y$  が実数でありさえすれば,  $a$  が実数である条件を満たす。

以上より,  $C$  の通過範囲は

$y$  軸上にないすべての点と点  $(0, 1)$  をあわせた図形 (答)

- (2)  $(x, y) = (0, 1)$  のときは任意の実数  $a$  で成り立つから, 特に  $-1 \leq a \leq 1$  なる実数  $a$  でも成り立つ。

$x \neq 0$  のとき

$$-1 \leq \frac{x^2 + 1 - y}{2x} \leq 1$$

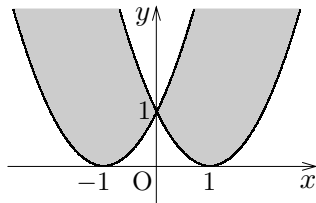
を整理して

$$\frac{x^2 + 1 - y}{2x} - (-1) = \frac{x^2 + 1 - y + 2x}{2x} = \frac{(x + 1)^2 - y}{2x} \geq 0$$

$$\frac{x^2 + 1 - y}{2x} - 1 = \frac{x^2 + 1 - y - 2x}{2x} = \frac{(x - 1)^2 - y}{2x} \leq 0$$

$$\therefore \begin{cases} x < 0 \text{ のとき} & y \geq (x + 1)^2 \text{ かつ } y \leq (x - 1)^2 \\ x = 0 \text{ のとき} & (x, y) = (0, 1) \\ x > 0 \text{ のとき} & y \leq (x + 1)^2 \text{ かつ } y \geq (x - 1)^2 \end{cases}$$

$C$  の通過範囲は, 次図の網目部分(境界を含む)となる。



(答)