

## 図チャレ 第170回(2015年11月)

一辺の長さ1の正四面体OABCにおいて、辺OAの中点をD、辺OBを2:1に内分する点をE、辺OCを1:2に内分する点をF、 $\triangle ABC$ の重心をGとするとき、四面体DEFGの体積Vを求めよ。

解答

正四面体OABCは、一辺の長さ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の立方体の4頂点を結んでできるから、正四面体OABCの体積 $v(\text{OABC})$ は

$$v(\text{OABC}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \times \left(1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4\right) = \frac{1}{6\sqrt{2}}$$

点Gは $\triangle ABC$ の重心であり、 $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ 、 $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} \\ &= \frac{1}{3}(2\overrightarrow{OD}) + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{OE}\right) + \frac{1}{3}(3\overrightarrow{OF}) \\ &= \frac{1}{6}(4\overrightarrow{OD} + 3\overrightarrow{OE} + 6\overrightarrow{OF}) \\ &= \frac{13}{6}\left(\frac{4}{13}\overrightarrow{OD} + \frac{3}{13}\overrightarrow{OE} + \frac{6}{13}\overrightarrow{OF}\right)\end{aligned}$$

$\frac{4}{13} + \frac{3}{13} + \frac{6}{13} = 1$ より、直線OGと平面DEFの交点をHとすると

$$\overrightarrow{OH} = \frac{4}{13}\overrightarrow{OD} + \frac{3}{13}\overrightarrow{OE} + \frac{6}{13}\overrightarrow{OF}, \quad \text{OG} = \frac{13}{6}\text{OH}$$

四面体の体積を $v(\quad)$ で表すと、

$$\begin{aligned}V = v(\text{DEFG}) &= \frac{\text{GH}}{\text{OH}}v(\text{ODEF}) \\ &= \frac{7}{6} \times \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}v(\text{OABC}) \\ &= \frac{7}{6} \times \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \times \frac{1}{6\sqrt{2}} \\ &= \frac{7}{324\sqrt{2}} \quad (\text{答})\end{aligned}$$