

## 図チャレ 第171回 (2015年12月)

鋭角三角形  $ABC$  において頂点  $A$  から辺  $BC$  におろした垂線の足を  $H$  とおく。辺  $AB$  に関して  $H$  と対称な点を  $P$ 、辺  $AC$  に関して  $H$  と対称な点を  $Q$  とし、線分  $PQ$  と辺  $AB$ 、 $AC$  との交点をそれぞれ  $D$ 、 $E$  とする。

- (1) 点  $E$  は  $\triangle ABH$  の外接円周上にあることを示せ。
- (2) 線分  $BE$  と線分  $CD$  の交点  $F$  は線分  $AH$  上にあることを示せ。

### 解答

- (1)  $P$ 、 $Q$  は  $H$  の対称点であるから

$$AP = AH = AQ$$

であり、

$$\angle BAP = \angle BAH = \alpha,$$

$$\angle CAH = \angle CAQ = \beta,$$

$$\angle APQ = \angle AQP = \gamma$$

とおくことができる。 $\triangle APQ$  において

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ \quad \therefore \alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$$

$\angle AHB = 90^\circ$  より、 $\triangle ABH$  の外接円は  $AB$  を直径とする円であり、点  $P$  を通る。

$AB \perp PH$  より

$$\angle AHP = 90^\circ - \alpha = \beta + \gamma$$

$\triangle AEQ$  において、 $\angle AEP$  は外角であるから

$$\angle AEP = \angle EAQ + \angle EQA = \beta + \gamma = \angle AHP$$

よって、 $A$ 、 $P$ 、 $B$ 、 $H$ 、 $E$  は同一円周上にある。

(証明おわり)

- (2) (1)の結果より

$$\angle AEB = \angle AHB = 90^\circ$$

以上の考察と同様にして、4点  $A$ 、 $C$ 、 $H$ 、 $D$  は同一円周上にあるから、

$$\angle ADC = \angle AHC = 90^\circ$$

よって、 $BE$  と  $CD$  の交点は  $\triangle ABC$  の垂心であり、 $AH$  上にある。

(証明おわり)

