

## 図チャレ 第 172 回 (2016 年 1 月)

座標平面上に 4 点  $O(0, 0)$ ,  $A(2016, 0)$ ,  $B(2016, 2016)$ ,  $C(0, 2016)$  を頂点とする正方形があり, 正方形  $OABC$  を  $x$  座標が 28 の倍数である  $y$  軸に平行な直線と  $y$  座標が 28 の倍数である  $x$  軸に平行な直線により, 一辺の長さ 28 の小正方形で分割する。このうち, ちょうど 72 個の正方形の内部を通過するような原点を通る直線の傾き  $m$  で 1 以下のものをすべて求めよ。

### 解答

題意の条件を相似な図形で考えても傾きは同じであるから,

$$A(72, 0), B(72, 72), C(0, 72)$$

として, ちょうど 72 個の単位正方形 (格子点を頂点とする一辺の長さ 1 の正方形) の内部を通過する条件を考えればよい。

$0 < m \leq 1$  であるから, 直線  $y = mx$  は辺  $AB$  と共有点をもち,

$x$  軸方向の各区間  $n - 1 \leq x \leq n$  ( $n$  は 72 以下の自然数) に

おいて 1 つずつ単位正方形を通過する。

したがって, 直線  $y = mx$  が  $y = 1, y = 2, \dots, y = 71$  と共有点をもつとすれば格子点に限られ,

直線  $y = mx$  と直線  $y = 1$  は, 共有点をもたないか,

$x$  座標が 72 の約数である格子点で交わる

ことが条件である。

以上より,  $0 < m \leq 1$  において条件を満たす傾き  $m$  は

$$0 < m \leq \frac{1}{72} \text{ および } m = \frac{1}{36}, \frac{1}{24}, \frac{1}{18}, \frac{1}{12}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 \quad (\text{答})$$