

図チャレ 第173回(2016年2月)

平面上の点 O を中心とし半径 1 の円周上に相異なる 3 点 A, B, C がある。
 $\triangle ABC$ の内接円の半径 r は $\frac{1}{2}$ 以下であることを示せ。

出典：2006年 京都大学

解答

$\triangle ABC$ の外接円の半径は 1 であるから，正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2$$

$\triangle ABC$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}(2 \sin A)(2 \sin B) \sin C = 2 \sin A \sin B \sin C$$

また，内接円の半径 r を用いて

$$S = \frac{1}{2}(BC + CA + AB)r$$

と表されるから，

$$r = \frac{2 \sin A \sin B \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

したがって， $r \leq \frac{1}{2}$ を示すには，

$$4 \sin A \sin B \sin C \leq \sin A + \sin B + \sin C$$

を示せばよい。

$A + B + C = \pi$ に注意して，補角の公式と加法定理を用いて

$$\begin{aligned} & \sin A + \sin B + \sin C - 4 \sin A \sin B \sin C \\ &= \sin A + \sin B + \sin(A + B) - 4 \sin A \sin B \sin(A + B) \\ &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} - 4 \sin A \sin B \cos \frac{A+B}{2} \right) \\ &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \left(2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - 4 \sin A \sin B \cos \frac{A+B}{2} \right) \\ &= 4 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \left(1 - 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A+B}{2} \right) \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$0 < \frac{A+B}{2} < \frac{\pi}{2}$ より

$$\sin \frac{A+B}{2} > 0, \quad \cos \frac{A}{2} > 0, \quad \cos \frac{B}{2} > 0 \quad \dots\dots ②$$

であり，また

$$8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A+B}{2} = 4 \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) \cos \frac{A+B}{2}$$

$$\leq 4\left(1 - \cos \frac{A+B}{2}\right) \cos \frac{A+B}{2} = -4\left(\cos \frac{A+B}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \leq 1$$

..... ③

であるから, ①, ②, ③をあわせて

$$4 \sin A \sin B \sin C \leq \sin A + \sin B + \sin C$$

が成り立ち, $r \leq \frac{1}{2}$ が示された。

(おわり)