

## 図チャレ 第174回(2016年3月)

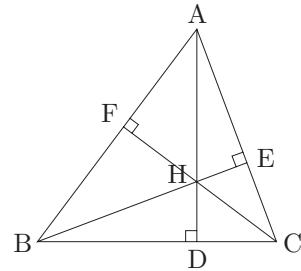
鋭角三角形  $\triangle ABC$  において、頂点  $A, B, C$  から各対辺に垂線  $AD, BE, CF$  を下ろす。これらの垂線は垂心  $H$  で交わる。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 四角形  $BCEF$  と  $AFHE$  が円に内接することを示せ。
- (2)  $\angle ADE = \angle ADF$  であることを示せ。

出典：2016年 東北大学

解答

- (1)  $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$   
 より、点  $E, F$  はいずれも  $BC$  を直径とする円周上にあり、四角形  $BCEF$  は円に内接する。  
 $\angle AEH = \angle AFH = 90^\circ$   
 より、点  $E, F$  は  $AH$  を直径とする円周上にあり、四角形  $AFHE$  は円に内接する。



(証明おわり)

- (2) (1)と同様にして、4点  $C, E, H, D$  が同一円周上にあることが示されるから、  
 $\angle ADE = \angle HDE = \angle HCE$  ..... ①  
 (1)より4点  $B, C, E, F$  は同一円周上にあるから、  
 $\angle HCE = \angle FCE = \angle FBE$  ..... ②  
 (1)と同様にして、4点  $B, D, H, F$  は同一円周上にあることが示されるから、  
 $\angle FBE = \angle FBH = \angle FDH = \angle ADF$  ..... ③

①, ②, ③より

$$\angle ADE = \angle ADF$$

(証明おわり)

(注) 本問の結果、 $\triangle ABC$  の垂心  $H$  は  $\triangle DEF$  の内心であることがわかる。