

図チャレ 第 175 回 (2016 年 4 月)

座標空間内の 2 点 $A(0, 1, 5)$, $B(5, 6, 0)$ を通る直線を l とする .
点 $P(4, 8, 13)$ および直線 l 上の 2 点 Q, R を頂点とする $\triangle PQR$ が正三角形であるとする . 次の問いに答えよ .

- (1) 直線 l に , 点 P から垂線を下ろし , 直線 l との交点を H とする . 点 H の座標を求めよ .
- (2) 正三角形 $\triangle PQR$ の一辺の長さを求めよ .
- (3) 四面体 $PQRS$ が正四面体になるようなすべての点 S の座標を求めよ .

出典 : 2016 年 同志社大学 全学部理系

解答

(1) $\overrightarrow{AB} = (5, 6, 0) - (0, 1, 5) = 5(1, 1, -1)$ を考え , $\vec{\ell} = (1, 1, -1)$ とおく .

H は l 上の点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OA} + t\vec{\ell} \quad (t \text{ は実数}) \\ &= (t, t+1, -t+5) \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と表され ,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PH} &= \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OP} \\ &= (t, t+1, -t+5) - (4, 8, 13) \\ &= (t-4, t-7, -t-8) \quad \dots\dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

は l と垂直であるから ,

$$\begin{aligned}\vec{\ell} \cdot \overrightarrow{PH} &= (t-4) + (t-7) - (-t-8) = 3t-3 = 0 \\ \therefore t &= 1\end{aligned}$$

①より

$$H(1, 2, 4) \quad (\text{答})$$

(2) ②より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PH} &= (-3, -6, -9) = -3(1, 2, 3) \\ PH &= 3\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = 3\sqrt{14}\end{aligned}$$

正三角形 PQR の一辺の長さは

$$\frac{2}{\sqrt{3}}PH = \frac{2}{\sqrt{3}} \times 3\sqrt{14} = 2\sqrt{42} \quad (\text{答})$$

(3) $\triangle PQR$ の重心を G とすると , G は PH を $2:1$ に内分するから

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OH}}{2+1} = \frac{1}{3}(4, 8, 13) + \frac{2}{3}(1, 2, 4) = (2, 4, 7)$$

正三角形の重心 G は外心でもあり，

$$PS = QS = RS$$

より，頂点 S は G を通る平面 PQR の法線上にある。

平面 PQR の法線ベクトルを $\vec{v} = (a, b, c)$ とおくと，

$$\vec{\ell} \cdot \vec{v} = a + b - c = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$-\frac{1}{3}\overrightarrow{PH} \cdot \vec{v} = a + 2b + 3c = 0 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

③ × 3 + ④ より

$$4a + 5b = 0$$

④ - ③ より

$$b + 4c = 0 \quad \therefore \frac{a}{5} = \frac{b}{-4} = c$$

$\vec{v} = (5, -4, 1)$ としてよいから，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OG} + k\vec{v} \quad (k \text{ は実数}) \\ &= (2, 4, 7) + k(5, -4, 1) \\ &= (5k + 2, -4k + 4, k + 7) \quad \dots\dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

と表され，

$$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OP} = (5k - 2, -4k - 4, k - 6)$$

PS = PQ より

$$(5k - 2)^2 + (-4k - 4)^2 + (k - 6)^2 = (2\sqrt{42})^2$$

$$42k^2 + 56 = 168$$

$$k^2 = \frac{112}{42} = \frac{8}{3} \quad \therefore k = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

⑤ より

$$S\left(\frac{6 \pm 10\sqrt{6}}{3}, \frac{12 \mp 8\sqrt{6}}{3}, \frac{21 \pm 2\sqrt{6}}{3}\right) \quad (\text{複号同順}) \quad (\text{答})$$