

## 図チャレ 第176回(2016年5月)

複素数平面上で原点  $O$  と 2 点  $A(\alpha)$ ,  $B(\beta)$  を頂点とする  $\triangle OAB$  がある。直線  $OB$  に関して点  $A$  と対称な点を  $C$ , 直線  $OA$  に関して点  $B$  と対称な点を  $D$  とするとき, 以下の問いに答えよ。ただし, 複素数  $z$  と共役な複素数を  $\bar{z}$  で表すものとする。

(1) 点  $C(\gamma)$  とするとき,  $\gamma = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\beta$  であることを示せ。

(2) 辺  $AB$  と直線  $DC$  が平行なとき,  $\triangle OAB$  はどのような三角形か。

出典 : 2016 年 岐阜薬科大学

### 解答

(1) 点  $A$  と点  $C$  は直線  $OB$  に関して対称であるから,

$$\frac{\alpha + \gamma}{2} \parallel \beta \text{ かつ } \alpha - \gamma \perp \beta$$

が成り立つ。 $\frac{\alpha + \gamma}{2} \parallel \beta$  より  $\frac{\alpha + \gamma}{\beta}$  は実数であるから

$$\frac{\bar{\alpha} + \bar{\gamma}}{\bar{\beta}} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}$$

$$\beta(\bar{\alpha} + \bar{\gamma}) = \bar{\beta}(\alpha + \gamma) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\alpha - \gamma \perp \beta$  より  $\frac{\alpha - \gamma}{\beta}$  は 0 または純虚数であるから

$$\frac{\bar{\alpha} - \bar{\gamma}}{\bar{\beta}} = -\frac{\alpha - \gamma}{\beta}$$

$$\beta(\bar{\alpha} - \bar{\gamma}) = -\bar{\beta}(\alpha - \gamma) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

① + ② より  $\bar{\gamma}$  を消去して

$$2\beta\bar{\alpha} = 2\bar{\beta}\gamma \quad \therefore \gamma = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\beta$$

(証明おわり)

(別解)  $\theta = \arg \frac{\beta}{\alpha}$  とおくと

$$\frac{\beta}{\alpha} = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

点  $C(\gamma)$  は直線  $OB$  に関して点  $A$  と対称であるから

$$\gamma = \alpha(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

$$= \alpha(\cos \theta + i \sin \theta)^2$$

$$= \alpha \left( \frac{\beta}{\alpha} \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| \right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \\
&= \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \beta
\end{aligned}$$

(証明おわり)

(2)  $D(\delta)$  とするとき, (1)と同様に考えて

$$\delta = \overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} \alpha$$

$\overrightarrow{CD}$  を表す複素数は

$$\delta - \gamma = \overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} \alpha - \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \beta$$

であるから

$$\frac{\delta - \gamma}{\alpha - \beta} = \frac{\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} \alpha - \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \beta}{\alpha - \beta}$$

$z = \frac{\beta}{\alpha}$  とおくと

$$\frac{\delta - \gamma}{\alpha - \beta} = \frac{\bar{z} - \frac{z}{z}}{1 - z} = \frac{z - \bar{z}^2}{\bar{z}(z - 1)}$$

AB と DC が平行のとき

$$\frac{\delta - \gamma}{\alpha - \beta} \text{ は実数}$$

であるから

$$\overline{\left(\frac{\delta - \gamma}{\alpha - \beta}\right)} = \frac{\delta - \gamma}{\alpha - \beta}$$

$$\frac{\bar{z} - z^2}{z(\bar{z} - 1)} = \frac{z - \bar{z}^2}{\bar{z}(z - 1)}$$

$$\bar{z}(z - 1)(\bar{z} - z^2) = z(\bar{z} - 1)(z - \bar{z}^2)$$

$$\bar{z}(z\bar{z} - z^3 - \bar{z} + z^2) = z(z\bar{z} - \bar{z}^3 - z + \bar{z}^2)$$

$$\bar{z}(-z^3 - \bar{z}) = z(-\bar{z}^3 - z)$$

$$z^2 - \bar{z}^2 - z\bar{z}(z^2 - \bar{z}^2) = 0$$

$$(z^2 - \bar{z}^2)(1 - z\bar{z}) = 0$$

$$(z + \bar{z})(z - \bar{z})(1 - |z|^2) = 0$$

$\alpha \not\parallel \beta$  より  $z = \frac{\beta}{\alpha}$  は実数でないから  $z - \bar{z} \neq 0$  であり,

$$\bar{z} = -z \text{ または } |z| = 1$$

$\therefore \alpha \perp \beta$  または  $|\alpha| = |\beta|$

よって、 $\triangle OAB$  は

$\angle AOB$  が直角である直角三角形

または

$OA = OB$  である二等辺三角形

(答)