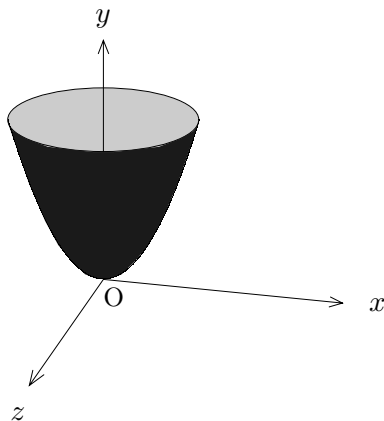


図チャレ 第 177 回 (2016 年 6 月)

xy 平面上の曲線 $y = x^2$ ($-3 \leq x \leq 3$) を y 軸のまわりに回転させて容器をつくり、この容器を水でいっぱい満たした。 xy 平面に垂直に図のように z 軸をとった後、高さ $y = 1$ にある容器上の 1 点が xz 平面に接するまで容器を静かに傾けた。ただし、傾ける際に容器は常に xz 平面に接するものとする。表面張力および容器の厚みを考えないとして、以下の問いに答えよ。

(1) 容器を傾ける前の容器内の水の量を求めよ。



(2) 容器を傾けた後の容器に残っている水の量を求めよ。

出典：2016 年 岐阜薬科大学

解答

(1) 曲線 $y = x^2$ は y 軸に関して対称であり, $0 \leq x \leq 3$ において

$$y = x^2 \iff x = \sqrt{y}$$

であるから, 容器を傾ける前の容器内の水の量 V_1 は

$$V_1 = \int_0^9 \pi(\sqrt{y})^2 dy = \pi \int_0^9 y dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^9 = \frac{81}{2} \pi \quad (\text{答})$$

(別法)

$$V_1 = \int_0^3 2\pi x \cdot x^2 dx = 2\pi \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^3 = \frac{81}{2} \pi \quad (\text{答})$$

(2) xy 平面上で, 点 $(1, 1)$ における $y = x^2$ の接線の方程式は

$$y = 2 \cdot 1 \cdot (x - 1) + 1 \quad \therefore y = 2x - 1$$

この接線に平行であり, 点 $(3, 9)$ を通る直線の方程式は

$$y = 2(x - 3) + 9$$

$$\therefore y = 2x + 3$$

$y = x^2$ と連立して y を消去すると

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x + 1)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = -1, 3$$

求める水の量 V_2 は, 座標空間内で

$$x^2 + z^2 \leq y \leq 2x + 3$$

で表される立体の体積と等しい。

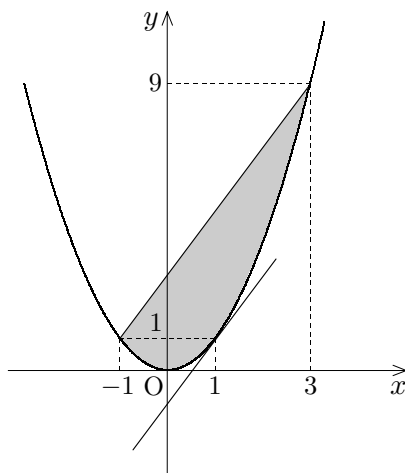
x を固定して x 軸に垂直な断面を考えると,

$$-x^2 + 2x + 3 \geq 0$$

のもとで, 断面積 $S(x)$ は

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_{-\sqrt{-x^2+2x+3}}^{\sqrt{-x^2+2x+3}} \{2x+3 - (x^2+z^2)\} dz \\ &= - \int_{-\sqrt{-x^2+2x+3}}^{\sqrt{-x^2+2x+3}} (z + \sqrt{-x^2+2x+3})(z - \sqrt{-x^2+2x+3}) dz \\ &= \frac{1}{6} (\sqrt{-x^2+2x+3} + \sqrt{-x^2+2x+3})^3 \\ &= \frac{4}{3} (-x^2+2x+3)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{4}{3} \{4 - (x-1)^2\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$x = 1 + 2 \sin \theta$ で置換することにより, 求める水の量 V_2 を計算すると



$$\begin{aligned}
V_2 &= \int_{-1}^3 S(x) dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{3} (4 - 4 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}} (1 + 2 \sin \theta)' d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} \cos^3 \theta \cdot 2 \cos \theta d\theta \\
&= \frac{64}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta \\
&= \frac{64}{3} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta \\
&= \frac{32}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2 \cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2} \right) d\theta \\
&= \frac{32}{3} \left[\frac{3}{2} \theta + \sin 2\theta + \frac{1}{8} \sin 8\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 8\pi \quad (\text{答})
\end{aligned}$$