

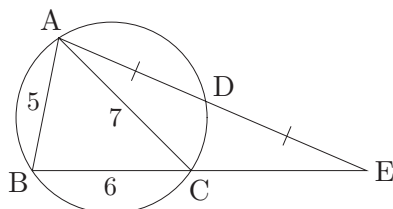
図チャレ 第178回(2016年7月)

円に内接する四角形 ABCD の 2 辺 AB, BC の長さはそれぞれ 5, 6 であり, 対角線 CA の長さは 7 である。直線 BC と直線 AD の交点を E とするとき, $AD = DE$ であるとする。線分 CE と線分 DE の長さを求めよ。

解答

$\triangle ABC$ において余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos \angle ABC &= \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 6} \\ &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$



$CE = x$, $AD = DE = y$ とおく。

点 E に関する方べきに注目すると $DE \cdot AE = CE \cdot BE$ が成り立つから

$$y \cdot 2y = x(x + 6) \quad \dots\dots ①$$

$\triangle ABE$ において余弦定理より

$$\begin{aligned}AE^2 &= BA^2 + BE^2 - 2 \cdot BA \cdot BE \cdot \cos \angle ABC \\ (2y)^2 &= 5^2 + (x + 6)^2 - 2 \cdot 5 \cdot (x + 6) \cdot \frac{1}{5} \quad \dots\dots ②\end{aligned}$$

①かつ②より y を消去して

$$\begin{aligned}2x(x + 6) &= 25 + (x + 6)^2 - 2(x + 6) \\ x^2 + 2x - 49 &= 0 \\ \therefore x &= 5\sqrt{2} - 1\end{aligned}$$

①に代入して

$$\begin{aligned}y^2 &= \frac{(5\sqrt{2} - 1)(5\sqrt{2} + 5)}{2} \\ &= \frac{45 + 20\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{5}{2}(9 + 2\sqrt{8}) \\ &= \frac{5}{2}(1 + \sqrt{8})^2 \\ \therefore y &= \sqrt{\frac{5}{2}}(1 + 2\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{10} + 4\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

以上より

$$CE = 5\sqrt{2} - 1, \quad DE = \frac{\sqrt{10} + 4\sqrt{5}}{2} \quad (\text{答})$$

(注) 三角形 ABC が二等辺三角形の場合であれば見かけるので, 不等辺三角形で出題してみることにした。