

図チャレ 第179回(2016年8月)

三角形OABの各辺を1辺とする3つの正方形ABCD, OAEF, OBGHを三角形OABの外側に作る。さらに、2つの平行四辺形ADPE, BCQGを正方形ABCDの外側に作る。

- (1) Oを原点とする複素数平面上で点A, Bを表す複素数をそれぞれ α, β とし、O, A, Bが反時計まわりに並ぶとき、点Dおよび点Fを表す複素数を求めよ。
- (2) 三角形OPQは直角二等辺三角形であることを証明せよ。

解答

- (1) 線分ABをAのまわりに -90° 回転させると線分ADに重なるから、点Dを表す複素数を δ とすると

$$\delta - \alpha = -i(\beta - \alpha)$$

$$\therefore \delta = (1+i)\alpha - i\beta \quad (\text{答})$$

Oのまわりに線分OAを -90° 回転させると線分OFに重なるから、

$$F \text{ を表す複素数は } -i\alpha \quad (\text{答})$$

- (2) $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DP}$ より

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF}$$

であるから、(1)より

$$\text{点 P を表す複素数は } \alpha - i\beta$$

以上と同様にして、点Cを表す複素数は

$$\beta + i(\alpha - \beta) = i\alpha + (1-i)\beta$$

$\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{OH}$ を表す複素数は

$$i\beta$$

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CQ}$ より、点Qを表す複素数は

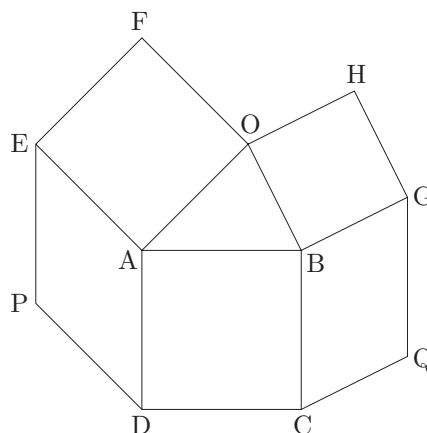
$$i\alpha + \beta = i(\alpha - i\beta)$$

これは、点Oのまわりに点Pを 90° 回転させると点Qになることを意味するから、

$$\angle POQ = 90^\circ, \quad OP = OQ$$

したがって、 $\triangle OPQ$ はPQを斜辺とする直角二等辺三角形である。

(証明おわり)



(注) 上の議論は、座標平面上でも全く同様にできる。

(2)は初等幾何でも証明できるが、 $\angle AOB$ と $\angle POQ$ の関係について細かく場合分けして論じる必要がある。 $\angle POQ$ が $\angle AOB$ を含むときは、次のような証明になる。

OAEF は正方形であるから

$$OA = AE$$

ABCD は正方形，ADPE は平行四辺形であるから，

$$AB = AD = EP$$

$\angle OAE = \angle BAD = 90^\circ$ ，AD // EP より

$$\angle OAB + \angle DAE = \angle DAE + \angle AEP = 180^\circ$$

であるから，

$$\angle OAB = \angle AEP$$

よって，

$$\triangle OAB \equiv \triangle AEP$$

同様にして，

$$\triangle OAB \equiv \triangle BQG$$

も成り立つから，特に

$$OA = BQ, AP = OB, \angle PAE = \angle GBQ$$

である。

$$\angle PAO = \angle PAE + 90^\circ = \angle GBQ + 90^\circ = \angle OBQ$$

より

$$\triangle PAO \equiv \triangle OBQ$$

であるから，

$$OP = OQ, \angle OPQ = \angle QOB. \angle AOP = \angle BQO$$

$\angle POQ$ が $\angle AOB$ を含むときは

$$\begin{aligned} \angle POQ &= \angle POA + \angle AOB + \angle BOQ \\ &= \angle POA + \angle PAE + \angle APO \\ &= \angle POA + (\angle OAP - 90^\circ) + \angle APO \\ &= (\triangle OAP \text{ の内角の総和}) - 90^\circ \\ &= 90^\circ \end{aligned}$$

(証明おわり)